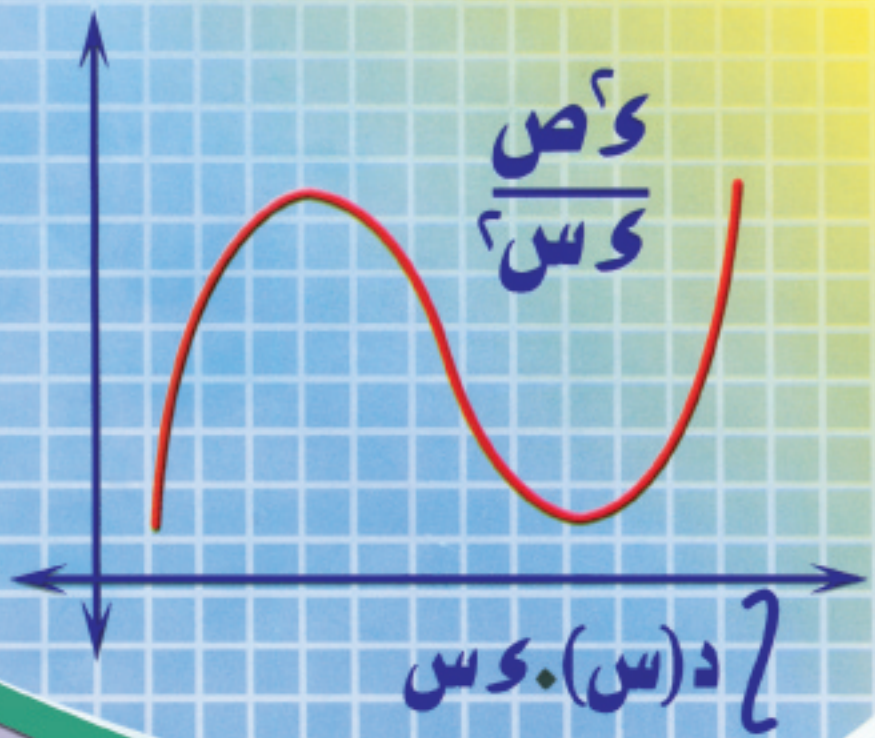
جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
قطاع الكتب

التفاضل والتكامل



٢٠١٤ - ٢٠١٥

للصف الثالث الثانوى

غير مصرح بتداول هذا الكتاب
خارج وزارة التربية والتعليم

جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
قطاع الكتب

التفاضل والتكامل

للصف الثالث الثانوى

تأليف

د. على نصر السيد الوكيل
د. نصر على حسن
عبد العزيز عيسى منون

قام بالتعديل

أحمد رضا أمين مهنا
محمد سلامة محمد
كمال عبد اللطيف سالم
نور الدين حافظ
محمد أسامة زيد شريف

٢٠١٤ - ٢٠١٥

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

انطلاقاً من النهضة التعليمية التى تمر بها مصر فى الوقت الحالى، و المحاولات الجادة والمخلصة لتطوير التعليم بجميع مراحله ، وبخاصة تطوير نظام الثانوية العامة، بهدف التخفيف عن كاهل أبنائنا وبناتنا، وبهدف التركيز على الكيف فى التعليم وليس على الكم ، والاهتمام بتنمية قدرات الفهم ، والتحليل ، والابتكار بدلاً من الحفظ والاستظهار ...

فقد تفضل الأستاذ الدكتور / وزير التربية و التعليم بإعطاء توجيهاته بتنقيح كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية نحو الأفضل مع الالتزام بتحقيق أهداف المادة فى هذه المرحلة .

وهكذا يظهر كتاب التفاضل والتكامل للمرحلة الثانية للثانوية العامة فى شكله المطور والذى نرجو أن يساعد الطلبة والطالبات على استيعاب محتواه ويحقق لهم النجاح .

والله ولى التوفيق ،،،

المؤلفون

المحتـويات

الباب	الموضـــوع	الصفحة
الأول	النهايات - الاتصال	٥ - ٣٠
	• نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة	٦
	• الاتصال عند النقطة	١٤
	• الاتصال على فترة	٢٣
الثانى	الاشتقاق	٣١ - ٤٦
	• قابلية الاشتقاق	٣٢
	• الاشتقاق الضمنى	٣٩
	• المشتقات العليا	٤١
الثالث	تطبيقات على المشتقة الأولى	٤٧ - ٦٣
	أولاً : التطبيق الهندسى	٤٧
	ثانياً : المعدلات الزمنية	٥٥
الرابع	سلوك الدالة - رسم منحناها	٦٤- ٩٥
	• تزايد وتناقص الدوال	٦٤
	• القيم العظمى والصغرى المحلية	٧٠
	• القيم العظمى والصغرى المطلقة	٧٤
	• التحدب لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب	٨٣
	• رسم منحنيات الدوال	٨٦
الخامس	التكامل	٩٧- ١١٢
	• خصائص التكامل	٩٩
	• تكامل بعض الدوال المثلثية	١٠٤
	• بعض تطبيقات التكامل	١٠٦
	اختبارات	١١٤

الباب الأول

النهايات

تذكر ما يأتى :

١ إذا كا نت د (س) كثيرة حدود من أى درجة فإن نهـــا د (س) = د (أ)
س ← أ

٢ إذا كانت د (س) على الصورة $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$ فإن :

نهـــا $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$ = ن أ$^{ن-١}$ ، نهـــا $\frac{س^{م} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}}$ = $\frac{ن}{م}$ أ$^{ن-م}$
س ← أ س ← أ

٣ إذا كانت د(س) دالة كسرية جبرية ولتكن د (س) = $\frac{ك (س)}{ق (س)}$ حيث ك ، ق كثيرتا حدود ، ق(س) ≠ ٠ فلإيجاد نهـــا د(س) نوجد د(أ) فإذا كانت :
س ← أ

(أ) د (أ) = $\frac{\text{عدد حقيقى}}{\text{عدد حقيقى} \neq ٠}$ فإن نهـــا د(س) = د (أ)
س ← أ

(ب) د (أ) = $\frac{\text{عدد حقيقى} \neq ٠}{\text{صفر}}$ فإن نهـــا د(س) = تكون غير معرفة أى ليس لها وجود.
س ← أ

(جـ) د (أ) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فيلزم التخلص من العامل (س - أ) من كل من البسط والمقام إما بالتحليل أو بالقسمة المطولة وذلك قبل إيجاد د (أ) .

٤ إذا كانت د(س) دالة كسرية جبرية تحتوى على جذور تربيعية وكان د (أ) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فيلزم للتخلص من العامل (س - أ) بضرب البسط والمقام فى مرافق البسط أو المقام (أو كليهما).

٥ بالنسبة لنهاية الدوال المثلثية :

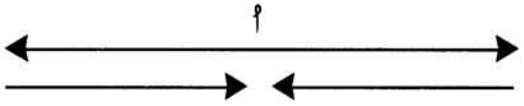
(أ) نهـــا حا س = حا أ ، نهـــا حتا س = حتا أ ، نهـــا طا س = طا أ بشرط أ ≠ ($\frac{٢ن + ١}{٢}$) ط ، ن ∈ ص مجموعة الأعداد الصحيحة
س ← أ س ← أ س ← أ

(ب) نهـــا $\frac{حا س}{س}$ = ١ ، نهـــا $\frac{طا س}{س}$ = ١ حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى
س ← ٠ س ← ٠

، نهـــا $\frac{حا أس}{ب س}$ = $\frac{أ}{ب}$ ، نهـــا $\frac{طا أس}{ب س}$ = $\frac{أ}{ب}$ حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى
س ← ٠ س ← ٠

نهاية الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة

(بنـد ١ - ١) :



نعلم من دراستنا السابقة أنه

إذا كانت س ، أ حيث أ ∈ ح

فإن س تعين فى أى لحظة من لحظات اقترابها من العدد أ عدداً يختلف عن أ

أى س = أ + هـ

وعندما هـ > ٠ فإن س > أ ونقول فى هذه الحالة إن س تقترب من أ من جهة اليمين

أى س ← أ +

وعندما هـ < ٠ فإن س < أ ونقول فى هذه الحالة إن س تقترب من أ من جهة اليسار

أى س ← أ -

فمثلاً لحساب نهـــا $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ = نهـــا $\frac{(س + ١)(س - ١)}{(س - ١)}$

س ← ١ ، س ← ١

جهة اليسار ← ، → جهة اليمين

س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	←	١	→	٠,٩٩٩	٠,٩٩	٠,٩
د (س)	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	←	٢	→	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩

نلاحظ من الجدول السابق أنه عندما تقترب س من العدد ١ من جهة اليمين فإن الدالة تقترب من العدد ٢ ونقول إن النهاية اليمنى للدالة عندما تقترب س من العدد ١ من جهة اليمين تساوى ٢

ويعبر عن ذلك نهـــا د (س) = ٢ أو د (١$^{+}$) = ٢

س ← ١$^{+}$

وبالمثل النهاية اليسرى للدالة = ٢ عندما تقترب س للعدد ١ من جهة اليسار .

أى نـهـــا د (س) = ٢ أو د (١ $^-$) = ٢
س ← ١$^-$

نظرية بدون برهان

الدالة د (س) تؤول للنهاية ل عندما س ← أ إذا وفقط إذا كانت نهايتاها اليمنى واليسرى عند أ موجودتين وكل منهما تساوى ل

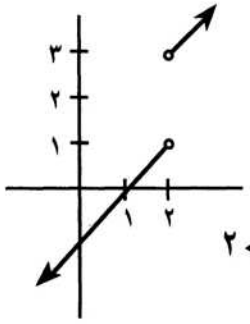
أى أن نـهـــا د (س) = ل إذا وفقط إذا كانت د (أ $^-$) = د (أ $^+$) = ل
س ← أ

ففى المثال السابق ∴ د (١ $^-$) = د (١ $^+$) = ٢

∴ نـهـــا د (س) = ٢
س ← ١

مثـال (١) :

إذا كان د (س) = { س + ١ ، س > ٢ ؛ س − ١ ، س < ٢ } أوجد نـهـــا د (س)
س ← ٢



الحـل

د (٢ $^+$) = نـهـــا (س + ١) = ٢ + ١ = ٣
س ← ٢$^+$

د (٢ $^-$) = نـهـــا (س − ١) = ٢ − ١ = ١
س ← ٢$^-$

∴ د (٢ $^+$) ≠ د (٢ $^-$) ∴ ليس لهذه الدالة نهاية عندما س ← ٢

- **ملاحظـة هـامـة :**

ليس السبب فى عدم وجود نهاية للدالة د عندما س ← ٢ هو عدم تعريفهـا عند س = ٢ ولكن يرجع السبب فى ذلك إلى تغير نهاية الدالة على يمين ويسار العدد ٢

فإذا فرض وعرفت الدالة بأىّ قيمة عند س = ٢ مثل :

د (س) = { س + ١ ، س > ٢ ؛ ٢ ، س = ٢ ؛ س − ١ ، س < ٢ } فليس لهذه الدالة نهاية أيضا عندما س ← ٢

مثـال (٢) :

إذا كان د (س) = $\frac{س^{٢} - ٣ |س|}{س^{٢} + ٤ س + ٣}$ أوجـد :

أولاً : نـهـا د (س) ثانيًا : نـهـا د (س) ثالثًا : نـهـا د (س)
س ← ٠ س ← -٣ س ← ٣

الحـل

$$\therefore |س| = \begin{cases} س & س \geq ٠ \\ -س & س < ٠ \end{cases}$$

$$\therefore د (س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٣ س}{س^{٢} + ٤ س + ٣} & س \geq ٠ \\ \frac{س^{٢} + ٣ س}{س^{٢} + ٤ س + ٣} & س < ٠ \end{cases}$$

∴ د (٠ +) = $\frac{٠}{٣}$ = صفر د (٠ −) = $\frac{٠}{٣}$ = صفر

∴ نـهـا د (س) = صفر
س ← ٠

وهو المطلوب أولاً ،

نـهـا د (س) = نـهـا $\frac{س^{٢} + ٣ س}{س^{٢} + ٤ س + ٣}$ = نـهـا $\frac{س (س + ٣)}{(س + ٣) (س + ١)}$
س ← -٣ س ← -٣ س ← -٣

= نـهـا $\frac{س}{(س + ١)}$ = $\frac{٣}{٢}$
س ← -٣

وهو المطلوب ثانيًا ،

نـهـا د (س) = نـهـا $\frac{س^{٢} - ٣ س}{س^{٢} + ٤ س + ٣}$ = $\frac{٩ - ٩}{٣ + ١٢ + ٩}$ = $\frac{صفر}{٢٤}$ = صفر
س ← ٣ س ← ٣

وهو المطلوب ثالثًا ،

• **ملاحظة هامة :**

إذا كانت الدالة معرفة على الفترة] أ ، ب [سواء كانت الفترة مفتوحة أو مغلقة فإننا نلاحظ أن :

(١) الدالة معرفة على يمين النقطة أ فقط فعند البحث عن نهـا د (س) يكتفى ببحث النهاية اليمنى فقط ، وتعتبر هي نهاية الدالة فى حالة وجودها . $\lim_{س \to أ^+}$

(٢) كذلك الدالة معرفة على يسار النقطة ب فقط فعند البحث عن نهـا د (س) يكتفى ببحث النهاية اليسرى فقط وتعتبر هى نهاية الدالة فى حالة وجودها . $\lim_{س \to ب^-}$

(٣) إذا كانت النقط جـ ∋] أ ، ب [وقاعدة تعريف الدالة تتغير على يمين ويسار جـ فعند البحث عن نهـا د (س) لابد من بحث وجود كل من النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند جـ $\lim_{س \to جـ}$

والمقارنة بينهما :

(أولاً) إذا كان د (جـ $^+$) = (جـ $^-$) = ل فإن نهـا د (س) = ل $\lim_{س \to جـ}$

(ثانيًا) إذا كان د (جـ $^+$) ≠ د (جـ $^-$) فإن نهـا د (س) ليس لها وجود $\lim_{س \to جـ}$

مثـال (٣) :

إذا كان د (س) = $\begin{cases} ٢ س + ١ & ١ < س < ٣ \\ س^٢ - ٢ & ٣ \geq س \geq ٥ \\ ٥ س & ٥ < س < ٧ \end{cases}$

ابحث وجود :

أولاً : نهـا د (س) $\lim_{س \to ١}$

ثانيًا : نهـا د (س) $\lim_{س \to ٣}$

ثالثًا : نهـا د (س) $\lim_{س \to ٥}$

رابعًا : نهـا د (س) $\lim_{س \to ٧}$

الحـــل

	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
د (س)	٢س + ١		س^{٢} - ٢			٥ س	

من الشكل أعلاه :

د (س) معرفة على يمين س = ١ فيكتفى ببحث النهاية اليمنى .

د (١ $^{+}$) = ٢ + ١ = ٣ ∴ نـهـــا د (س) = ٣

س ← ١

وهو المطلوب أولاً

∴ قاعدة تعريف الدالة تتغير على يمين ويسار س = ٣

د (٣ $^{-}$) = ٦ + ١ = ٧

د (٣ $^{+}$) = ٩ - ٢ = ٧

∴ د (٣ $^{-}$) = د (٣ $^{+}$) = ٧

∴ نـهـــا د (س) = ٧

س ← ٣

وهو المطلوب ثانيًا

∴ قاعدة تعريف الدالة تتغير على يمين ويسار س = ٥

∴ لابد من بحث النهايتين اليمنى واليسرى

د (٥ $^{-}$) ٢٥ - ٢ = ٢٣

د (٥ $^{+}$) = ٥ × ٥ = ٢٥

∴ د (٥ $^{+}$) ≠ د (٥ $^{-}$) ∴ ليس للدالة نهاية عند س = ٥

وهو المطلوب ثالثًا

∵ الدالة معرفة على يسار س = ٧ ∴ يكتفى ببحث النهاية اليسرى

نهـــا د (س) = ٥ × ٧ = ٣٥ ∴ نهـــا د (س) = ٣٥
س ← ٧⁻ س ← ٧

∴ للدالة نهاية عند س = ٧

وهو المطلوب رابعًا

مثـال (٤) :

إذا كان د (س) = { جا س / س ، - ط/٢ < س < . ؛ جتا س ، . < س < ط/٢ } ابحث وجود

أولاً : نهـــا د (س) ثانيًا : نهـــا د (س) ثالثًا : نهـــا د (س)
س ← - ط/٢ س ← . س ← ط/٢

الحـــل

د (س) معرفة على الفترة ف =] - ط/٢ ، ط/٢ [- { . }

نهـــا د (س) = نهـــا جا س / س = جا (- ط/٢) / - ط/٢ = - ١ / - ١ = ٢/ط
س ← - ط/٢⁺ س ← - ط/٢

∴ نهـــا د (س) = ٢/ط
س ← - ط/٢

وهو المطلوب أولاً

نهـــا د (س) = نهـــا جا س / س = ١
س ← .⁻ س ← .⁻

نهـــا د (س) = نهـــا جتا س = ١
س ← .⁺ س ← .⁺

∴ د (. ⁻) = د (. ⁺) ∴ نهـــا د (س) = ١
س ← .

وهو المطلوب ثانيًا

نهـــا د (س) = نهـــا جتا س = صفر ∴ نهـــا د (س) = صفر
س ← ط/٢⁻ س ← ط/٢⁻ س ← ط/٢

وهو المطلوب ثالثًا

تمارين (١-١)

(١) إذا كان د (س) =
$$\begin{cases} س^{٢} & س \leq ١ \\ ٣ - ٢س & س > ١ \end{cases}$$
فابحث وجود نهـــا د (س) عندما س ← ١

(٢) إذا كان د (س) =
$$\begin{cases} ٣ + س & س < ٢ \\ ٢ س^{٢} + ١ & س > ٢ \end{cases}$$
فابحث وجود نهـــا د (س) عندما س ← ٢

(٣) إذا كان د (س) =
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{س - ١}}{س - ١} & س < ١ \\ \frac{٢}{٥ - س} & س > ١ \end{cases}$$
فابحث وجود نهـــا د (س) عندما س ← ١

(٤) إذا كان د (س) =
$$\begin{cases} ٢ س + \frac{|س - ٣|}{٣ - س} & س < ٣ \\ س + ٤ & س > ٣ \end{cases}$$
فابحث وجود نهـــا د (س) عندما س ← ٣

(٥) إذا كان د (س) = $\frac{س^{٢} + س}{|س + ١|}$ فابحث وجود كل من :

أولاً : نهـــا د (س) عندما س ← -٣ ثانيًا : نهـــاد (س) عندما س ← -١ ثالثًا : نهـــا د (س) عندما س ← .

(٦) إذا كان د (س) = س | س - ٢ | + ١

أولاً - أثبت أن : نهـــا د(س) = نهـا د (س) عندما س ← . ثانياً- أبحث وجود : نهـا د (س) عندما س ← ٢ عندما س ← -١

(٧) إذا كان د (س) =
- $\frac{\text{جا } ٣ \text{ س}}{\text{س}}$ ، س < ٠
- جتا ٣ س + ٢ ، س > ٠

فأبحث وجود نهـــا د (س) عندما س ← ٠

(٨) إذا كان د (س) =
- $\frac{٥ \text{ س} + \text{ظا } ٢ \text{ س}}{٦ \text{ س} + \text{جا س}}$ ، س < ٠
- جتا س ، س > ٠

فأبحث وجود نهـــا د (س) عندما س ← ٠

(٩) إذا كان د (س) =
- $س^{٢} - ٢س$ ، $-٢ < س < ١$
- $٣س - ٤$ ، $١ \geq س < ٤$
- $س + ٣$ ، $٤ \geq س < ٧$

فابحث وجود :

أولاً : نهـــا د (س) عندما س ← -٢

ثانيًا : نهـــا د (س) عندما س ← ٧

ثالثًا : نهـــا د (س) عندما س ← ١

رابعًا : نهـــا د (س) عندما س ← ٤

(١٠) إذا كانت د (س) =
- $\frac{٣ \text{ س}}{\text{ظا س}}$ ، $-\frac{ط}{٣} < س < ٠$
- ٣ جتا س ، $٠ < س < \frac{ط}{٣}$

فأبحث وجود :

أولاً : نهـــا د (س) عندما س ← $-\frac{ط}{٣}$

ثانيًا : نهـــا د (س) عندما س ← ٠

ثالثًا : نهـــا د (س) عندما س ← $\frac{ط}{٣}$

(١١) إذا كانت د (س) =
- $\frac{\text{جا } (س - ١)}{س - ١}$ ، س < ١
- $\text{ظا } \frac{ط \text{ س}}{٤}$ ، س > ١

فأبحث وجود نهـــا د (س) عندما س ← ١

(بنـد ٢ - ١) اتصـال الدالة :

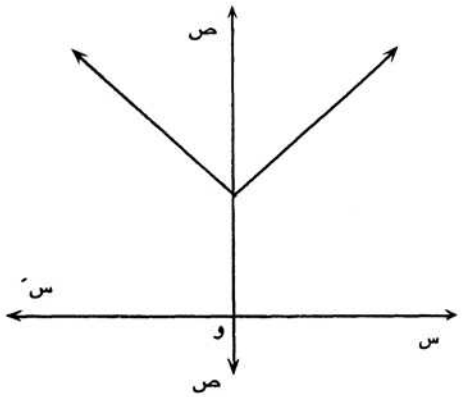
أولاً : اتصال الدالة عند نقطة

لنتأمل الأشكال (١) ، (٢) التى تمثل دوالاً من ح ← ح

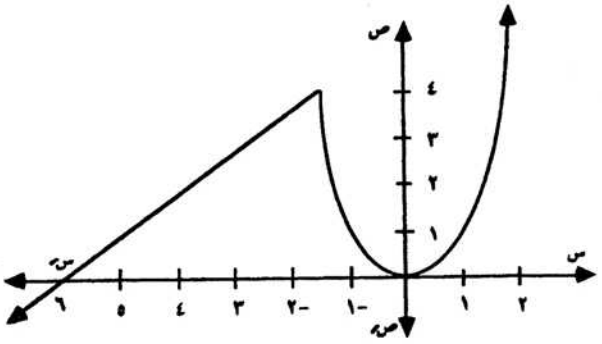
د١ (س) = | س | + ١

د٢ (س) = { س٢ ، س ≤ -٢ ؛ س + ٦ ، س > -٢ }

= { س + ١ ، س ≤ . ؛ ١ - س ، س > . }



شكل (١)



شكل (٢)

د١ (.) = ١

نهـــا د١ (س) = ١
س ← .

د١ (.) = نهـــا د١ (س)
س ← .

د٢ (-٢) = ٤

نهـــا د٢ (س) = ٤
س ← -٢

د٢ (-٢) = نهـــا د٢ (س)
س ← -٢

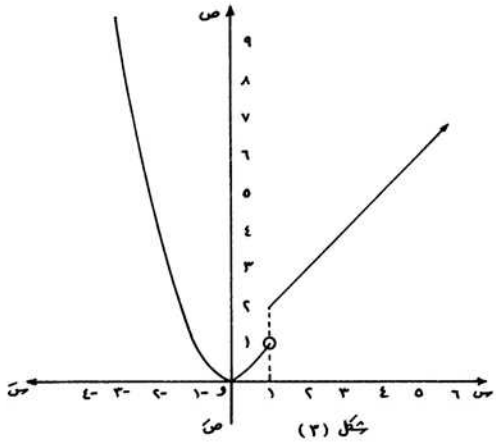
نلاحظ أن التمثيل البيانى لمنحنى الدالة الأولى د١ عند س = . ليس به قفزة أو ثغرة لذلك نقول إن هذه الدالة متصلة عند س = .

كذلك منحنى الدالة الثانية د٢ عند س = -٢ ليس به قفزة أو ثغرة لذلك نقول إن هذه الدالة متصلة عند س = -٢

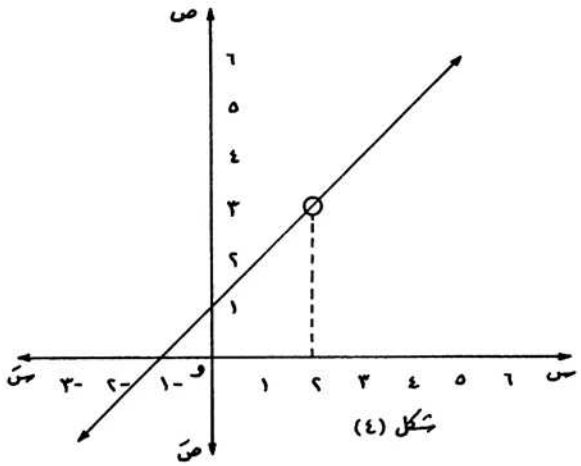
لنتأمل الأشكال (٣) ، (٤) التى تمثل الدوال

$$د_٣(س) = \begin{cases} س^٢ & ، \quad س < ١ \\ س + ١ & ، \quad س \geq ١ \end{cases}$$

$$د_٤(س) = \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢}$$



شكل (٣)



شكل (٤)

$د_٣(١) = ٢$

$د_٤(٢)$ غير معرفة

$\lim_{س \to ١} د_٣(س)$ ليس لها نهاية

$\lim_{س \to ٢} د_٤(س) = ٣$

نلاحظ أن التمثيل البيانى للدالة $د_٣$ عند س = ١ توجد به قفزة ولذلك نقول إن هذه الدالة غير متصلة عند س = ١

كما أن التمثيل البيانى للدالة $د_٤$ عند س = ٢ توجد به ثغرة لذلك نقول إن هذه الدالة غير متصلة عند س = ٢

وبشكل عام يقال إن الدالة د متصلة عند س = أ إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية :

(١) د (أ) لها وجود أى أن الدالة معرفة عند س = أ

(٢) $\lim_{س \to أ} د(س)$ لها وجود .

(٣) $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

وإذا انتفى شرط أو أكثر من تلك الشروط فإن الدالة تكون غير متصلة عند س = أ

ويلاحظ أن الشرط الثالث يتضمن الشرطين الأول والثانى (لأنه لا يمكن أن يتساوى د (أ) ، نهـــا د (س) إلا إذا كانا موجودين) .
س ← أ

وعلى ذلك إذا كان لدينا دالة معرفة على فترة ما وأردنا أن نختبر اتصال هذه الدالة عند نقطة ما فى مجالها فكل ما نفعله أن نستخدم هذا التعريف .

تعـــريف:

إذا كانت الدالة د معرفة على فترة وكانت أ تنتمى إلى هذه الفترة نقول أن د متصلة عند أ إذ وفقط إذا كانت :

$$\text{نهـــا}_{س \to أ} \; د(س) = د(أ)$$

مثـــال (١) :

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة :

$$د(س) = \begin{cases} ٢س + ٦ & س < . \\ ٠ & \text{عند } س = . \\ س^{٢} & س > . \end{cases}$$

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ١}{س - ١} & س \neq ١ \\ ٣ & \text{عند } س = ١ \\ & س = ١ \end{cases}$$

الحـــل

(١) . . د (٠) ليس لها وجود لأن الدالة غير معرفة عند س = .

∴ الدالة غير متصلة عند س = .

(٢) ∴ د (١) = ٣

، نهـــا $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ = نهـــا (س + ١) = ٢
س ← ١ ، س ← ١

، ∴ د (١) ≠ نهـــا $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$
س ← ١

∴ الدالة غير متصلة عند س = ١

مثـــال (٢) :

ابحث اتصال الدوال د (س) = س | س - ٣ | + ١ عندما س = ٣

الحـــل

د (س) = { س^٢ - ٣س + ١ ، س ≤ ٣ ؛ - س^٢ + ٣ س + ١ ، س > ٣ }

∴ د (٣) = ١ ..... (١)

د (٣ +) = نهـــا (س٢ - ٣س + ١) = ١
س ← ٣+

د (٣ −) = نهـــا (- س٢ + ٣س + ١) = ١
س ← ٣−

∴ د (٣ +) = د (٣ −) = ١ ∴ نهـــا د (س) = ١ ..... (٢)
س ← ٣

من (١) ، (٢) الدالة متصلة عند س = ٣

ملاحظة : فى هذا المثال يمكن الحل كما يلى :

د (٣) = ٣ | ٣-٣ | + ١ = ١ = نهـــا د (س) ∴ الدالة متصلة عند س = ٣
س ← ٣

مثـــال (٣) :

ابحث اتصال الدالة د (س) = { $\frac{جا\ ٢\ س}{س}$ - جتا س ، س ≠ . ؛ عند س = . ؛ $\frac{١}{٢}$ ، س = . }

الحـــل

$$د(٠) = \frac{١}{٢}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} د(س) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \left(\frac{\text{جا } ٢س}{س} - \text{جتا } س \right)$$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا } ٢س}{س} - \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \text{جتا } س = ٢ - ١ = ١$$

∴ د (٠) ≠ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠}$ د (س) ∴ الدالة غير متصلة عند س = ٠

مثـــال (٤) :

هل يمكن إعادة تعريف كل من الدوال الآتية لتصبح متصلة عند النقط المبينة أمام كل منهما :

(١) د (س) = $\frac{٢س^{٢} - ٥س + ٢}{٢س - ١}$ عند س = $\frac{١}{٢}$

(٢) د (س) = $\frac{|س + ١|}{س + ١}$ عند س = -١

الحـــل

(١) لكى تكون الدالة متصلة عند س = $\frac{١}{٢}$

لابد أن تكون $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{١}{٢}}$ د (س) = د ($\frac{١}{٢}$)

∴ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{١}{٢}} \frac{٢س^{٢} - ٥س + ٢}{٢س - ١} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{١}{٢}} \frac{(٢س - ١)(س - ٢)}{(٢س - ١)} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{١}{٢}} (س - ٢)$

$$= \frac{١}{٢} - ٢ = -\frac{٣}{٢}$$

∴ لكى تكون الدالة متصلة عند س = $\frac{١}{٢}$ تكون د ($\frac{١}{٢}$) = $-\frac{٣}{٢}$

ويعاد تعريفها كالآتى : د (س) =

$\frac{٢س^{٢} - ٥س + ٢}{٢س - ١}$ ، س ≠ $\frac{١}{٢}$

$\frac{-٣}{٢}$ ، س = $\frac{١}{٢}$

(٢) د (س) = $\frac{|س + ١|}{س + ١}$ =

١ ، س > -١

-١ ، س < -١

د (-١^{+}) = ١

د (-١^{-}) = -١

∴ ليس للدالة نهاية عند س = -١

∴ لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند س = -١

تمارين (١-٢)

(١) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها :

(أ) د (س) = ٥ - | س - ٣ | عند س = ٣

(ب) د (س) =

$\frac{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س + ٢}}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢

عند س = ٢

٣ ، س = ٢

(جـ) د (س) =
- $\frac{س^{٦} - ١}{س^{٥} - ١}$ ، س > ١
- عند س = ١
- $\frac{٦}{٤ + س}$ ، س ≤ ١

(د) د (س) =
- $\frac{جا ٢ س}{س} - جتا س$ ، س ≠ .
- عند س = .
- $\frac{١}{٢}$ ، س = .

(هـ) د (س) =
- $\frac{جا س ظا ٢ س}{س^{٢}}$ ، س ≠ .
- عند س = .
- ٢ ، س = .

(و) د (س) =
- $\frac{٣ س + جا ٢ س}{جا ٣ س}$ ، س ≠ .
- عند س = .
- $\frac{٥}{٣}$ ، س = .

(ز) د (س) =
- ١ + جا س ، س < $\frac{ط}{٢}$
- $\frac{ط}{٢}$ عند س =
- ٢ + (س − $\frac{ط}{٢}$)^{٢} ، س ≤ $\frac{ط}{٢}$

(٢) أوجد قيمة ك التى تجعل كل من الدوال الآتية متصلة عند النقطة المبينة أمام كل منهما :

(أ) د (س) =
- $\frac{٣ س^{٢} - ٨ س - ٣}{س - ٣}$ ، س ≠ ٣
- عند س = ٣
- ك ، س = ٣

(ب) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س^{٢} - ١} & س \neq ١ \\ ك & س = ١ \end{cases}$ عند س = ١

(جـ) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٥} - ١}{س^{٣} - ١} & س \neq ١ \\ ك & س = ١ \end{cases}$ عند س = ١

(د) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{جا (س - ٣)}{٢ س - ٦} & س \neq ٣ \\ ك & س = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(هـ) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{جتا ٢ س - ١}{س^{٢}} & س \neq ٠ \\ ك & س = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(و) د (س) = $\begin{cases} جا ٣ س ظتا ٢ س & س \neq ٠ \\ ك & س = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٣) أعد تعريف كلا من الدوال الآتية بحيث تكون متصلة عند النقطة المبينة أمام كل منها إذا كان ممكنا :

(أ) د (س) = $\dfrac{\sqrt{٢ س + ٣} - ٣}{س - ٣}$ عند س = ٣

(ب) د (س) = $\dfrac{|س - ٣|}{س - ٣}$ عند س = ٣

(جـ) د (س) =
- $س^{٣} + ٢ س$ ، $س < ١$
- عند س = ١
- ٥ س − ١ ، $س > ١$

(د) د (س) =
- جا س − جتا س ، $س < .$
- عند س = .
- ظا س ، $س > .$

(هـ) د (س) =
- $\frac{٥ س + ظا س}{جا س}$ ، $س < .$
- عند س = .
- ٦ جتا س ، $س > .$

(٤) إذا كانت د (س) =
- $س^{٢} + أ س + ٣$ ، $س > ١$
- $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ ، $س < ١$

أوجد قيمة أ لكى يكون نهـــا د (س) لها وجود . ثم أعد تعريف الدالة لكى تكون متصلة عند س = ١

(٥) إذا كانت د (س) =
- $٣ س^{٢} - ١$ ، $س \geq .$
- $أ س^{٢} + ب$ ، $. < س < ١$
- $\sqrt{٤ س + ٥}$ ، $س \leq ١$

متصلة عند س = . ومتصلة عند س = ١ فأوجد قيمة كل من أ ، ب

(٦) للدالة د حيث د (س) =
- $٤ - أ س^{٢}$ ، $س \geq ٢$
- $س + ٣$ ، $س < ٢$

أوجد قيمة الثابت أ ،لكى تكون الدالة د متصله عند س = ٢ .

ثانيًا : اتصال الدالة على فترة :

تعـــريف :

(١) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف =] أ ، ب [فإننا نقول أن د متصـلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة .

(٢) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف = [أ ، ب] فإننا نقول أن د متصـلة على ف إذا تحققت الشروط التالية :

(أ) د متصلة على] أ ، ب [

(ب) د متصلة من اليمين عند أ أى $د(أ) = \lim_{س \to أ^+} د(س)$

(جـ) د متصلة من اليسار عند ب أى $د(ب) = \lim_{س \to ب^-} د(س)$

نظرية بدون برهان :

إذا كانت الدالتان $د_١$ ، $د_٢$ معرفتين على الفترة ف =] أ ، ب [وكانتا متصلتين على الفترة ف فإن كلا من الدوال الآتية تكون متصلة على الفترة ف .

(١) $د_١ \pm د_٢$ (٢) $د_١ \times د_٢$ (٣) $\frac{د_١}{د_٢}$ حيث $د_٢(س) \neq .$

نتائج : لبعض أنماط الدوال المتصلة :

(١) دالة كثيرة الحدود

$د(س) = أ_. + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + ... + أ_ن س^ن$ متصلة على ح أو فترة تعريفها.

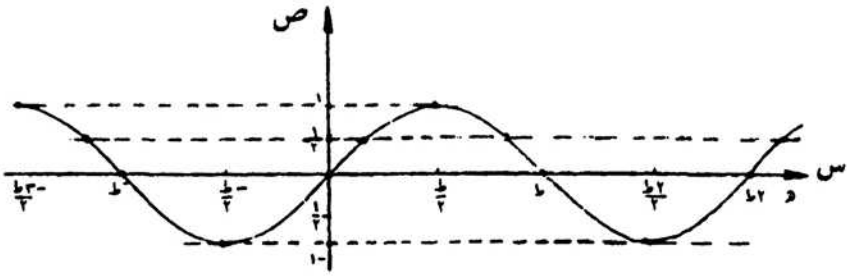
(٢) الدالة الكسرية و (س) = $\frac{أ_{.} + أ_{١} س + أ_{٢} س^{٢} + ... أ_{ن} س^{ن}}{ب_{.} + ب_{١} س + ب_{٢} س^{٢} + ... ب_{ن} س^{ن}}$

متصلة على ح عدا عند أصفار دالة المقام ...

(٣) الدوال المثلية :

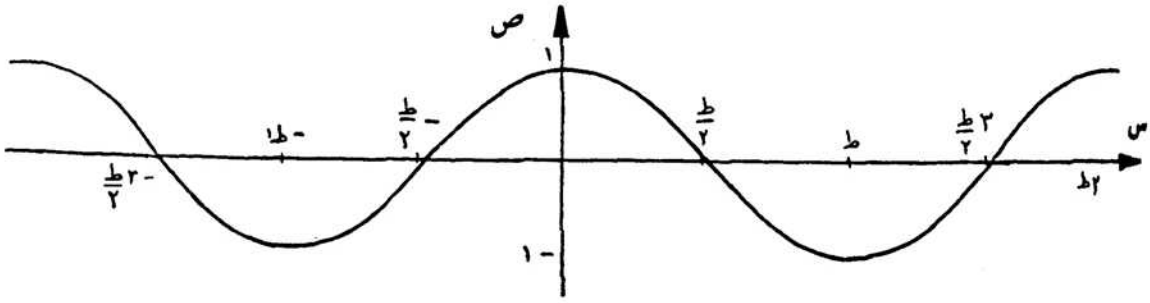
(أ) دالة الجيب : د (س) = جا س متصلة على ح

ويتضح ذلك من التمثيل البيانى لها المبين فى الشكل التالى ...



(ب) دالة جيب التمام : د (س) = جتا س متصلة على ح

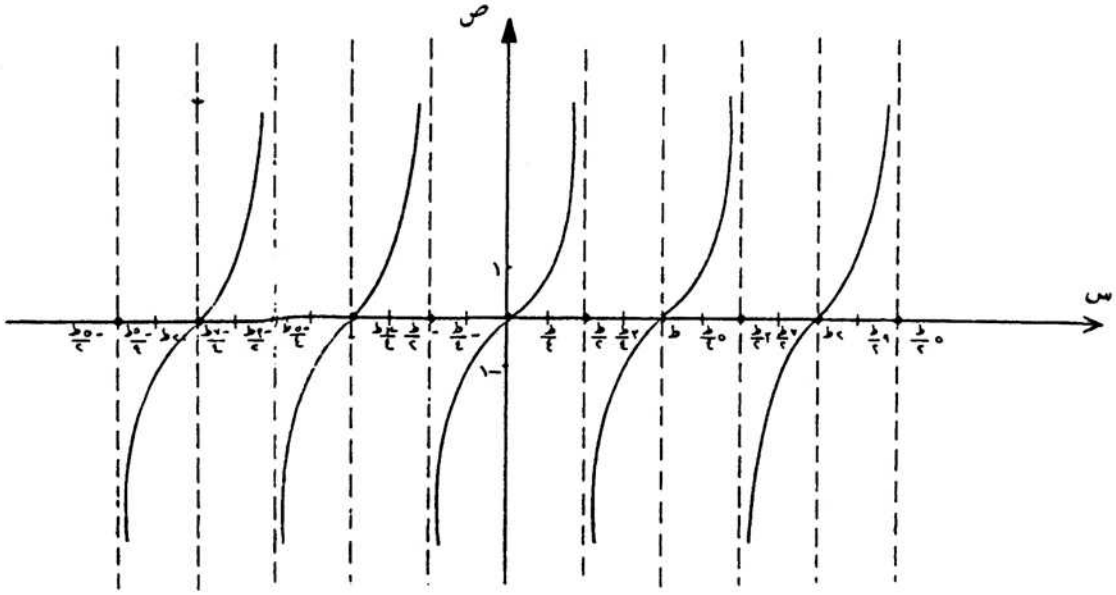
ويتضح ذلك من التمثيل البيانى لها المبين فى الشكل التالى ...



(جـ) دالة الظل : د (س) = ظا س

متصلة على ح - $\left\{ س : س = \frac{ط}{٢} + ن ط ، ن \ni ص \right\}$

ويتضح ذلك من التمثيل البيانى لها المبين فى الشكل التالى .



مثـــال (١) :

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية :

(١) د (س) = $س^{٢}$ + ٥ س - ٣

(٢) د (س) = ٧

(٣) د (س) = $س^{٢}$ + ٣ س - ٢ + ٥ $س^{-١}$ + ٦ $س^{-٢}$

(٤) د (س) = $\frac{س + ٢}{٢ س + ١}$

(٥) د (س) = $\frac{س - ٣}{س^{٢} + ٩}$

(٦) د (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} - ٣ س + ٢}$

الحـــل

(١) د (س) = $س^{٢}$ + ٥ س - ٢ كثيرة حدود متصلة على ح

(٢) د (س) = ٧ كثيرة حدود (ثابتة) متصلة على ح

(٣) د (س) $= س^{٢} + ٣ س - ٢ + \frac{٥}{س} + \frac{٦}{س^{٢}}$ متصلة على ح - { ٠ }

(٤) د (س) $= \frac{س + ٢}{٢ س + ١}$ متصلة على ح - $\{ -\frac{١}{٢} \}$

(٥) د (س) $= \frac{س - ٣}{س^{٢} + ٩}$ ∴ $س^{٢} + ٩ > ٠$ دائمًا أى لا توجد أصفار للمقام

∴ الدالة متصلة على ح

(٦) د (س) $= \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} - ٣ س + ٢}$ ∴ $س^{٢} - ٣س + ٢ = (س - ٢) (س - ١)$

∴ أصفار المقام هما ٢ ، ١

∴ الدالة متصلة على ح - { ٢ ، ١ }

مثـــال (٢) :

ابحث اتصال الدالة د (س) $=$
$$\begin{cases} ٥ س - ٢ & -١ \leq س \leq ٣ \\ س^{٢} + ٤ & ٣ < س < ٥ \\ س^{٢} - ٣ & ٥ \leq س < ٧ \end{cases}$$

الحـــل

د (س) معرفة على الفترة ف = [-١ ، ٧ [

لكى نبحث اتصال د فى الفترة ف نبحث اتصالها على فترات مجالها الجزئية ، وكذلك اتصالها عند النقط التى يتغير عندها تعريف الدالة وأيضًا اتصالها من اليمين عند س = -١

(١) د (س) = ٥ س - ٢ لكل س ∋] -١ ، ٣ [

متصلة على الفترة] -١ ، ٣ [لأنها كثيرة حدود

بالمثل د (س) = $س^{٢}$ + ٤ لكل س] ٣ ، ٥ [متصلة على الفترة] ٣ ، ٥ [لأنها كثيرة حدود ،

د (س) = $س^{٢}$ - ٣ لكل س ∋] ٥ ، ٧ [متصلة على الفترة] ٥ ، ٧ [لأنها كثيرة حدود ،

(٢) د (-١) = -٥ - ٢ = -٧ = نهـــــا (س)
س ← -١+

∴ الدالة متصلة من اليمين عند س = -١

(٣) د (٣) = ٥ × ٣ - ٢ = ١٣ = نهـــــا د (س)
س ← ٣-

، نهـــــا د (س) = نهـــــا (س٢ + ٤) = ٩ + ٤ = ١٣
س ← ٣+ س ← ٣+

∴ د (٣) = د (٣-) = د (٣+) = ١٣

∴ الدالة متصلة عند س = ٣

(٤) د (٥) = ٢٥ - ٣ = ٢٢ = نهـــــا د (س)
س ← ٥+

نهـــــا د (س) = ٢٥ + ٤ = ٢٩
س ← ٥-

∴ د (٥+) ≠ د (٥-) ∴ الدالة غير متصلة عند س = ٥

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) :

الدالة د متصلة على الفترة [-١ ، ٧ [- { ٥ }

مثـــال (٣) :

ابحث اتصال الدالة د (س) =
$$\begin{cases} ١ + \text{جا } س & ٠ \leq س < \frac{ط}{٢} \\ ٢ + (س - \frac{ط}{٢})^{٢} & س \leq \frac{ط}{٢} \end{cases}$$

الحـــل

د (س) معرفة على الفترة [٠ ، ∞ [

لكى نبحث اتصال الدالة نبحث اتصالها على فترات مجالها الجزئية ، وكذلك اتصالها عند النقط التى يتغير عندها تعريف الدالة ، وأيضا اتصالها من اليمين عند الصفر .

(١) د (س) = ١ + جا س

متصلة على الفترة] ٠ ، $\frac{ط}{٢}$ [

وكذلك د (س) = ٢ + (س - $\frac{ط}{٢}$)^{٢}

متصلة على الفترة] $\frac{ط}{٢}$ ، ∞ [

(٢) د (٠) = ١ + جا ٠ = ١

نهـــا د (س) = ١ + جا ٠ = ١ ∴ الدالة متصلة من اليمين عند س = ٠
س ← ٠$^{+}$

(٣) د ($\frac{ط}{٢}$) = ٢ + ($\frac{ط}{٢}$ - $\frac{ط}{٢}$)^{٢} = ٢

نهـــا د (س) = نهـــا (١ + جا س) = ١ + ١ = ٢
س ← $\frac{ط}{٢}^{-}$ س ← $\frac{ط}{٢}^{-}$

نهـــا د (س) = نهـــا (٢ + (س - $\frac{ط}{٢}$)^{٢}) = ٢
س ← $\frac{ط}{٢}^{+}$ س ← $\frac{ط}{٢}^{+}$

∴ نهـــا د (س) = ٢ = د ($\frac{ط}{٢}$)
س ← $\frac{ط}{٢}$

∴ الدالة متصلة عند س = $\frac{ط}{٢}$

من (١) ، (٢) ، (٣) الدالة متصلة على [٠ ، ∞ [

تمارين (١-٣)

(١) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية :

(أ) د (س) = $س^{٣} - ٥ س^{٢} + ٣س + ١$ (ب) (س) = $\frac{س - ١}{س + ٥}$

(جـ) د (س) = $\frac{س + ٣}{س^{٢} + ٥س + ٦}$ (د) د (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س + ١}$

(هـ) د (س) = $\frac{س - ١}{س^{٢} + ١}$ (و) د (س) = $\frac{س}{س^{٢} + س + ١}$

(٢) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية :

(أ) د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٣ س + ٢ & س > ٠ \\ ٢ - س & س < ٠ \end{cases}$

(ب) د (س) = $\begin{cases} ٣ س + ٥ & س > -١ \\ -٢ س & س \geq -١ \end{cases}$

(جـ) د (س) = $\begin{cases} س^{٢} & س < ٣ \\ ٥ س - ٤ & س \leq ٣ \end{cases}$

(د) د (س) =
- $\frac{\text{ظا } ٢س}{س}$ ، $\frac{ط}{٤} > س > .$
- ٢ جتا س ، $. \geq س > -\frac{ط}{٤}$

(هـ) د (س) =
- $\frac{\text{جا } (س + ٢)}{س + ٢}$ ، $س < -٢$
- $\frac{١}{٤} س^{٢}$ ، $س \leq -٢$

(٣) ابحث اتصال الدالة د (س) =
- $\frac{٢س + \text{جا } ٢ س}{\text{جا } ٣ س}$ ، $-\frac{ط}{٦} < س < .$
- $\frac{١}{٣} + \text{جتا } ٣ س$ ، $. \geq س > \frac{ط}{٦}$

(٤) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية :

(أ) د (س) =
- $\frac{س^{٦} - ١}{س^{٣} - ١}$ ، $-٤ < س < ١$
- ٣ س − ١ ، $١ \geq س < ٤$
- $س^{٢}$ ، $٤ \geq س < ٦$

(ب) د (س) =
- $س^{٢} - ١$ ، $س \geq -٢$
- س + ٥ ، $-٢ < س < ٣$
- ٣س − ١ ، $س \leq ٣$

(٥) إذا كانت د (س) =
- ٤ س ، $س \geq -١$
- أ س + ب ، $-١ < س < ٣$ متصلة على ح فما قيمة كل من أ ، ب
- −٢ س ، $س \leq ٣$

الباب الثانى

الإشتقاق

تذكر ما يأتى :

١ إذا كانت ص = أ س^{ن} فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ن أ س$^{ن-١}$ (حيث أ ثابت)

٢ إذا كانت ص = أ (حيث أ ثابت) فإن $\frac{د ص}{د س}$ = صفر

٣ $\frac{د}{د س}$ (د . ر) = د . ر$'$ + ر . د$'$ حيث كل من د ، ر دوال فى س

٤ $\frac{د}{د س}$ ($\frac{د}{ر}$) = $\frac{ر . د' - د . ر'}{ر^{٢}}$ حيث ر (س) ≠ .

٥ إذا كانت ص = د (ع) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى ع ، ع = ر (س) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س فإن :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

٦ إذا كانت ص = [د (س)]^{ن} فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ن [د (س)]$^{ن-١}$ × د$'$ (س)

٧ إذا كانت ص دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س فإن :

$$\frac{د}{د س} (ص^{ن}) = ن ص^{ن-١} \cdot \frac{د ص}{د س}$$

٨ إذا كانت ص = حا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = حتا س

وإذا كانت ص = حا (أ س + ب) فإن $\frac{د ص}{د س}$ = أ حتا (أ س + ب) حيث أ ، ب ثابتان

٩ إذا كانت ص = حتا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = - حا س

إذا كانت ص = حتا (أ س + ب) فإن $\frac{د ص}{د س}$ = -أ حا (أ س + ب) حيث أ ، ب ثابتان

١٠ إذا كانت ص = طا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = قا^{٢}س

إذا كانت ص = طا (أ س + ب) فإن $\frac{د ص}{د س}$ = أ قا^{٢} (أ س + ب) حيث أ ، ب ثابتان

قابلية الإشتقاق :

نعلم من دراستنا السابقة أن المشتقة الأولى للدالة ص = د (س) هى :

$$\frac{ى ص}{ى س} = \text{نهـــا}_{هـ \to .} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

تعـــريف:

تكون الدالة ص = د (س) قابلة للاشتقاق عند نقطة س = أ تنتمى لمجال الدالة

إذا كان $\left[\frac{ى ص}{ى س}\right]_{س=أ}$ **لها وجـــود**

أى $\text{نهـــا}_{هـ \to .} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ **لها وجود**

ملاحـظـــات :

(١) إذا كانت النقطة س = أ تنتمى لمجال تعريف الدالة وكانت الدالة يتغير تعريفها فى يمين ويسار النقطة س = أ فعند البحث عن قابلية الاشتقاق عند س = أ لابد من بحث المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى للدلة عند س = أ والمقارنة بينهما فإذا كان :

أولاً : المشتقة اليمنى = دَ ($أ^+$) = $\text{نهـــا}_{هـ \to .^+} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

تساوى المشتقة اليسرى = دَ ($أ^-$) = $\text{نهـــا}_{هـ \to .^-} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

فإن الدالة تكون قابلة للاشتقاق عند س = أ

ثانيًا : دَ ($أ^+$) ≠ دَ ($أ^-$) فإن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق عند س = أ

(٢) إذا كانت الدالة ص = د (س) معرفة على الفترة [أ ، ب] فإنه عند بحث قابلية الاشتقاق عند س = أ يكتفى ببحث تحقق وجود المشتقة اليمنى فقط ، وفى حالة وجودها تكون هى مشتقة الدالة . وعند بحث قابلية الاشتقاق عند س = ب يكتفى ببحث تحقق وجود المشتقة اليسرى فقط . وفى حالة وجودها تكون هى المشتقة الدالة .

(٣) قواعد الاشتقاق التى سبق دراستها فى العام الماضى لا يجوز استخدامها فى بحث قابلية الاشتقاق ولبحث قابلية الاشتقاق عند النقطة س = س$_{١}$ لابد من استخدام التعريف :

$$د(س_{١}) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س_{١}+هـ) - د(س_{١})}{هـ}$$

نظرية بدون برهان

- **إذا كانت الدالة ص = د (س) قابلة للاشتقاق عند النقطة س = أ فإنها تكون متصلة عند نفس النقطة .**

ملاحظات هامة :

(أ) عكس النظرية السابقة غير صحيح دائمًا بمعنى أنه إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فليس شرطًا أن تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة .

فى حين الدالة القابلة للاشتقاق عند نقطة تكون متصلة عند نفس النقطة .

(٢) إذا كانت الدالة غير متصلة عند النقطة س = أ فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عندها .

مثـــال (١) :

ابحث قابلية اشتقاق الدالة ص = $\sqrt{س}$ عند أى نقطة فى مجالها .

الحـــل

مجال الدالة هى [٠ ، ∞ [

نفرض نقطة س = أ تنتمى للفترة] ٠ ، ∞ [

$$د'(أ) = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{د(أ+هـ) - د(أ)}{هـ} = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{(أ+هـ)^{\frac{1}{2}} - (أ)^{\frac{1}{2}}}{هـ}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{(أ+هـ)^{\frac{1}{2}} - أ^{\frac{1}{2}}}{(أ+هـ) - أ} = \frac{1}{2} أ^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{أ}}$$

∴ د' (أ) لها وجود ∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند أى نقطة تنتمى للفترة] ٠ ، ∞ [

قابلية أشتقاق الدالة عند س = ٠

يكتفى ببحث وجود المشتقة اليمنى للعدد صفر

$$د'(٠^+) = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0^+} \frac{د(٠+هـ) - د(٠)}{هـ} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0^+} \frac{(٠+هـ)^{\frac{1}{2}} - (٠)^{\frac{1}{2}}}{هـ}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0^+} \frac{هـ^{\frac{1}{2}}}{هـ} = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0^+} \frac{1}{هـ^{\frac{1}{2}}}$$ غير معرف

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٠

مثـــال (٢) :

إذا كان د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & س \leq ٣ \\ ٢ س + ٤ & س > ٣ \end{cases}$ فابحث اتصال الدالة د عند س = ٣

ثم ابحث قابلية اشتقاقها عند س = ٣

الحـــل

د (٣) = $٣^{٢}$ + ١ = ١٠ = د (٣^{+})

د (٣^{-}) = $\underset{س \leftarrow ٣^{-}}{نهـــا}$ (٢ س + ٤) = ٦ + ٤ = ١٠

∴ د (٣) = د (٣^{+}) = د (٣^{-}) ∴ الدالة متصلة عند س = ٣

∴ الدالة يتغير تعريفها عند س = ٣

∴ المشتقة اليمنى = دَ (٣^{+}) = $\underset{هـ \leftarrow ٠^{+}}{نهـــا}$ $\frac{د (٣ + هـ) - د (٣)}{هـ}$

دَ (٣^{+}) = $\underset{هـ \leftarrow ٠^{+}}{نهـــا}$ = $\frac{((٣ + هـ)^{٢} + ١) - (٩ + ١)}{هـ}$ = $\underset{هـ \leftarrow ٠^{+}}{نهـــا}$ $\frac{٩ + ٦ هـ + هـ^{٢} + ١ - ١٠}{هـ}$

= $\underset{هـ \leftarrow ٠^{+}}{نهـــا}$ (٦ + هـ) = ٦

المشتقة اليسرى = دَ (٣^{-}) = $\underset{هـ \leftarrow ٠^{-}}{نهـــا}$ $\frac{د (٣ + هـ) - د (٣)}{هـ}$

= $\underset{هـ \leftarrow ٠^{-}}{نهـــا}$ = $\frac{٢ (٣ + هـ) + ٤ - (٩ + ١)}{هـ}$ = $\underset{هـ \leftarrow ٠^{-}}{نهـــا}$ $\frac{٦ + ٢ هـ + ٤ - ١٠}{هـ}$

= $\underset{هـ \leftarrow ٠^{-}}{نهـــا}$ $\frac{٢ هـ}{هـ}$ = ٢

∴ دَ (٣^{+}) ≠ دَ (٣^{-}) ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٣

مثـــال (٣) :

إذا كان د (س) = $\begin{cases} ٢س - ٣ & س \geq ١ \\ س^{٢} - ٢ & س < ١ \end{cases}$

ابحث قابلية الدالة د للاشتقاق عند س = ١

الحـــل

$$د'(١^{+}) = \lim_{هـ \to 0^{+}} \frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0^{+}} \frac{((١+هـ)^{٢} - ٢) - (٢-٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0^{+}} \frac{١ + ٢هـ + هـ^{٢} - ٢ + ١}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0^{+}} (٢ + هـ) = ٢$$

$$د'(١^{-}) = \lim_{هـ \to 0^{-}} \frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0^{-}} \frac{(٢(١+هـ) - ٣) - (٢ - ٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0^{-}} \frac{٢ + ٢هـ - ٣ - ٢ + ٣}{هـ} = \lim_{هـ \to 0^{-}} ٢ = ٢$$

∴ د' (١$^{+}$) = د' (١$^{-}$) ∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

مثـــال (٤) :

إذا كان د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٤ & س \geq ٢ \\ أ س + ب & س < ٢ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ، أوجد قيمة كل من أ ، ب

الحـــل

∴ د (س) قابلة للاشتقاق عند س = ٢

∴ الدالة متصلة عند س = ٢ أى د (٢) = د (٢$^{-}$) = د (٢$^{+}$)

∴ ٢٢ - ٤ = ٢أ + ب أى ٢أ + ب = صفر ..... (١)

د' (س) = $\begin{cases} ٢س & س \geq ٢ \\ أ & س < ٢ \end{cases}$

∴ د' (٢$^{+}$) = د (٢$^{-}$) ∴ أ = ٢ × ٢ أى أ = ٤

بالتعويض فى (١) ∴ ب = - ٨

تمارين (٢-١)

(١) ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة :

(أ) د (س) = س + $\frac{١}{س}$ عند س = ١

(ب) د (س) = $\sqrt[٣]{س + ٥}$ عند أى نقطة تنتمى لمجالها .

(جـ) د (س) = | ٢س - ٣ | عند س = $\frac{٣}{٢}$

(د) د (س) = ٣ - | س -١ | عند س = ١

(٢) إذا كان د (س) = $\begin{cases} ٢ س - ١ & س \leq ٢ \\ ٢ س + ١ & س > ٢ \end{cases}$

ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ٢

(٣) إذا كان د (س) = $\begin{cases} س^{٢} & س \geq ٢ \\ س + ٢ & س < ٢ \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة د عند س = ٢ ، وكذلك قابلية اشتقاقها عند س = ٢

(٤) إذا كان د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + س + ١ & س \leq ١ \\ ٣ س & س > ١ \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة د عند س = ١ ، وكذلك قابلية اشتقاقها عند س = ١

(٥) إذا كان د (س) =
$$\begin{cases} أ\ س^{٢} + ب\ س & س \leq ١ \\ ٣\ س - ١ & س > ١ \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند س = ١ فما قيمة كل من أ ، ب

(٦) إذا كان د (س) =
$$\begin{cases} أ\ س + ب & س \leq ٢ \\ س^{٢} & س > ٢ \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فما قيمة كل من أ ، ب

(٧) إبحث قابلية الاشتقاق للدالة د حيث :

د (س) = س | س | وذلك عند س = صفر .

(٨) أوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب اللذين يجعلان :

الدالة د حيث : د (س) =
$$\begin{cases} س^{٢} - ١ & س > ٣ \\ ٢\ أ\ س + ب & س \geq ٣ \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند س = ٣

الدالة الضمنية - الاشتقاق الضمنى :

لقد درسنا فيما سبق المشتقة الأولى لبعض الدوال تمثلت قاعدة الاقتران فى كل منها بمعادلة على الصورة ص = د (س) مثل :

$$ص = \frac{س - ١}{٢ س + ٣} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

ويكون $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٢ س + ٣ - ٢ (س - ١)}{(٢ س + ٣)^{٢}} = \frac{٥}{(٢ س + ٣)^{٢}}$

غير أن قاعدة الاقتران قد تمثل بمعادلة على الصورة د (س ، ص) = ٠

فقاعدة الاقتران السابقة ص = $\frac{س - ١}{٢ س + ٣}$ قد تعرف بالمعادلة

$$٢س ص + ٣ ص - س + ١ = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢)$$

وتكون المشتقة الأولى لهذه العلاقة كالآتى :

$$٢ ص + \frac{ء ص}{ء س} \times ٢ س + ٣ \frac{ء ص}{ء س} - ١ = ٠$$

$$\frac{ء ص}{ء س} (٢ س + ٣) = ١ - ٢ ص$$

$$\therefore ص = \frac{س - ١}{٢ س + ٣}$$

$$\therefore \frac{ء ص}{ء س} (٢ س + ٣) = ١ - \frac{٢ س - ٢}{٢ س + ٣} = \frac{٢ س + ٣ - ٢ س + ٢}{٢ س + ٣} = \frac{٥}{(٢ س + ٣)}$$

$$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٥}{(٢ س + ٣)^{٢}}$$

- وإذا كانت الدالة معرفة بالصورة ص = د (س) فإننا نقول إنها دالة صريحة .
- أما إذا كانت الدالة معرفة بالصورة د (س ، ص) = ٠ فإننا نقول إنها دالة ضمنية والاشتقاق فى هذه الحالة يسمى اشتقاق ضمنى .

• **ملاحظـــــات :**

(١) قد لاتعرف قاعدة الدالة بالصورة ق (س ، ص) = ٠ بالضرورة دالة واحدة .

مثل $س^{٢} + ص^{٢} - ٢٥ = ٠$ أى $ص^{٢} = ٢٥ - س^{٢}$

$\therefore ص = \sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ ، $ص = -\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$

الأولى : $ص = \sqrt{٢٥ - س^{٢}}$

ويكون $\frac{د ص}{د س} = \frac{- ٢ س}{٢\sqrt{٢٥ - س^{٢}}} = \frac{- س}{ص}$

الثانية : $ص = -\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$

ويكون $\frac{د ص}{د س} = \frac{- ٢ س}{-٢\sqrt{٢٥ - س^{٢}}} = \frac{- س}{ص}$

والمشتقة الأولى لقاعدة الاقتران $س^{٢} + ص^{٢} - ٢٥ = ٠$.

$٢ س + ٢ ص \frac{د ص}{د س} = ٠$ ومنها $\frac{د ص}{د س} = \frac{- س}{ص}$

(٢) سواء كانت الدالة المعطاة على صورة دالة صريحة أو على صورة دالة ضمنية فإنه يمكن إيجاد مشتقتها الأولى مباشرة من قاعدة الارتباط .

مثـــال (١) :

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مما يأتى :

(أ) $٢ ص^{٢} - ٥ س ص = س^{٢}$ (ب) جتا ٣ ص = جا ٢ س

الحـــل

(أ) ∵ ٢ ص^{٢} - ٥ س ص = س^{٢}

∴ ٤ ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ - ٥ ص - $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ × ٥ س = ٢ س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ (٤ ص - ٥ س) = ٥ ص + ٢ س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{٥ ص + ٢ س}}{\text{٤ ص - ٥ س}}$

(ب) ∵ جتا ٣ ص = جا ٢ س

∴ -٣ جا ٣ ص × $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ جتا ٢ س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{-٢ جتا ٢س}}{\text{٣ جا ٣ ص}}$

المشتقات العليـــا :

لقد درسنا مشتقة الدالة ص = د(س) ووجدنا أن المشتقة الأولى $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ هى أيضا دالة فى س .

- وإذا كانت المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق فإن مشتقتها $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ ($\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$) تسمى المشتقة الثانية للدالة (أو مشتقة المشتقة) ويرمز لها بأحد الرموز $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ أ ، صً أ ، دً (س) وتكون المشتقة الثانية هى دالة .
- وإذا كانت $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ قابلة للاشتقاق فإن مشتقاتها $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ ($\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$) تسمى بالمشتقة الثالثة ويرمز لها بأحد الرموز $\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د س}^{٣}}$ أ ، صً أ ، دً (س)
- وإذا كانت $\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د س}^{٣}}$ قابلة للاشتقاق فإننا نستطيع اشتقاقها وهكذا .... نستطيع الحصول على مشتقات أعلى من المشتقة الأولى.

مثـــال (٢) :

أوجد المشتقة الثالثة لكل من الدوال الآتية :

(أ) ص = $س^{٤} - ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ٤ س$

(ب) ص = $\frac{س - ١}{س + ١}$

الحـــل

(أ) ص = $س^{٤} - ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ٤ س$

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = ٤ س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٦ س - ٤$

$\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ١٢ س^{٢} - ١٢ س + ٦$

، $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}} = ٢٤ س - ١٢$

(ب) ∴ ص = $\frac{س - ١}{س + ١}$

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{(س + ١) - (س - ١)}{(س + ١)^{٢}} = ٢ (س + ١)^{-٢}$

، $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = -٤ (س + ١)^{-٣}$

، $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}} = ١٢ (س + ١)^{-٤}$

مثـــال (٣) :

إذا كان : ص = $٣ س^{٢}$ + جا ٢ س فأوجد $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$

الحـــل

∴ ص = $٣ س^{٢}$ + جا ٢ س

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = ٦ س + ٢$ جتا ٢ س

$$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٦ - ٤ \text{ جا } ٢ س \quad ،$$

$$\therefore \frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} = - ٨ \text{ جتا } ٢ س$$

مثـــال (٤) :

إذا كان $ص^{٢} + أ س^{٣} - ب س = جـ$ حيث أ ، ب ، جـ ثوابت .

أثبت أن $ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + (\frac{د ص}{د س})^{٢} + ٣ أ س = .$

الحـــل

$\therefore ص^{٢} + أ س^{٣} - ب س = جـ$ وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore ٢ ص \frac{د ص}{د س} + ٣ أ س^{٢} - ب = .$ وباشتقاق مرة ثانية بالنسبة إلى س

$٢ \frac{د ص}{د س} \times \frac{د ص}{د س} + ٢ ص \times \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٦ أ س = .$

$\therefore (\frac{د ص}{د س})^{٢} + ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٣ أ س = .$

أى $ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + (\frac{د ص}{د س})^{٢} + ٣ أ س = .$

مثـــال (٥) :

إذا كان $ص = س$ جا س فاثبت أن :

$س \frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} + س \frac{د ص}{د س} + ٢ ص =$ صفر

الحـــل

$\therefore ص = س$ جا س وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore ص' =$ جا س + س جتا س وباشتقاق مرة ثانية بالنسبة إلى س

$ص' = جتا س + جتا س - س جا س$

$\therefore ص' = ٢ جتا س - ص$

$\therefore ص'' = -٢ جا س - ص'$ بالضرب × س

$\therefore س ص'' = -٢ س جا س - س ص'$

$= -٢ ص - س ص'$

$\therefore س ص'' + س ص' + ٢ ص = ٠$

$\therefore س \frac{د^٣ ص}{د س^٣} + س \frac{د ص}{د س} + ٢ ص = ٠$

مثـــال (٦) :

إذا كان $٢ س ص + ٣ = ٥ س^٢$ فاثبت أن :

$س (\frac{د^٢ ص}{د س^٢}) + ٢ (\frac{د ص}{د س}) = ٥$

الحـــل

$٢ س ص + ٣ = ٥ س^٢$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore ٢ س \frac{د ص}{د س} + ص × ٢ = ١٠ س$ وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س

$\therefore ٢ س \frac{د^٢ ص}{د س^٢} + ٢ \frac{د ص}{د س} + ٢ \frac{د ص}{د س} = ١٠$ وبقسمة الطرفين على ٢

$\therefore س (\frac{د^٢ ص}{د س^٢}) + ٢ (\frac{د ص}{د س}) = ٥$

تمارين (٢-٢)

(١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مما يأتى :

(أ) $٢ س^{٣} + ٢ ص^{٣} = ٩ س ص$

(ب) $س^{٢} - ٢ ص^{٢} + ٧ = ٠$

(جـ) $س^{٣} + ص^{٣} + ٤ = ٠$

(د) $س^{٢} - ٢ س ص + ٢ ص^{٢} = ١$

(هـ) $س^{٣} + ٢ س^{٢} ص - س ص^{٢} + ٢ ص^{٣} = ٥$

(و) جا ٢ س = ظا ص

(ز) جتا س = جا ٣ ص

(٢) أوجد ميل المماس للمنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(أ) $٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} = ٥$ عند النقطة (-١ ، -١)

(ب) $س^{٢} - س ص + ص^{٢} = ٢٧$ عند النقطة (٦ ، ٣)

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س - ٢ص - ٦ = ٠$ عند النقطة (-٣ ، ٥)

(٣) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لكل من المنحنيات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} + ٢س - ٢ ص - ٦ = ٠$ عند النقطة (١ ، -١)

(ب) $\frac{س}{ص} - \frac{٤ ص}{س} = ٣$ عند النقطة (١ ، -١)

(جـ) $س^{٣} - س^{٢} ص - س - ٣ ص = ٠$ عند النقطة (١ ، ٠)

(٤) أوجد المشتقة الثالثة لكل من :

(أ) ص = $س^{٥} - س^{٣} + س - ٢$ (ب) ص = $٢ س + \frac{٣}{س}$

(جـ) ص = $\frac{س - ٢}{٢ س + ٣}$ (د) $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

(هـ) ص = جا س (و) ص = جتا ٢ س

(ز) ص = ٣ س + جا س (ح) ص = س جا س

(٥) أوجد المشتقة الثانية للدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(أ) ص = $س + \frac{١}{س}$ عند النقطة (١ ، ٢)

(ب) ص = $\frac{٢ س - ١}{س + ٣}$ عند النقطة (-٢ ، -٥)

(جـ) ص = ٢ جا ٢ س عندما س = $\frac{ط}{٢}$

(د) ص = جا س - جتا س عندما س = $\frac{ط}{٤}$

(هـ) ص = س جتا ٢ س عندما س = $\frac{ط}{٢}$

(٦) إذا كان د (س) = $أ س^{٣} + ٣ س^{٢}$ و $د'$ (س) = ١٢ فما قيمة أ

(٧) إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ أثبت أن : $ص^{٣} ص'' + ١ = ٠$

(٨) إذا كان $٢ ص^{٣} = ٣ س^{٢}$ أثبت أن : $ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٢ (\frac{د ص}{د س})^{٢} = \frac{١}{ص^{٥}}$

(٩) إذا كان ص = حتا س أثبت أن : $(\frac{د ص}{د س})^{٢} - ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ١$

(١٠) إذا كان ص = جا ٢ س أثبت أن : $٤ (\frac{د ص}{د س})^{٢} + (\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}})^{٢} = ١٦$

(١١) إذا كان ص = ٣ جا (٢ س + ١) أثبت أن : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٤ ص = ٠$

(١٢) إذا كان س = $(ص^{٣} - ١)^{٥}$ أثبت أن : $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص^{-٣} - ١}{١٥ س ص^{٢}}$

الباب الثالث

تطبيقات على المشتقة الأولى

أولا - التطبيق الهندسى :

مراجعة لبعض المفاهيم الأساسية :

* بفرض م ميل المستقيم هـ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

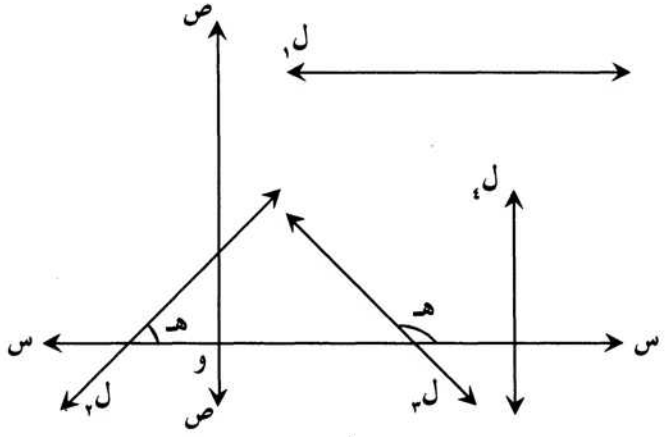
(١) ميل المستقيم م = ظا هـ ففى شكل (١)

ميل المستقيم ل١ = صفر لأنه يوازى محور السينات

ميل المستقيم ل٢ > صفر ..... لماذا ؟

ميل المستقيم ل٣ < صفر ..... لماذا ؟

ميل المستقيم ل٤ غير معرف لأنه يوازى محور الصادات .



شكل (١)

(٢) ميل المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠ هـو

$$م = - \frac{أ}{ب}$$

ويمكن إيجاد ميل المستقيم باشتقاق معادلته بالنسبة للمتغير س .

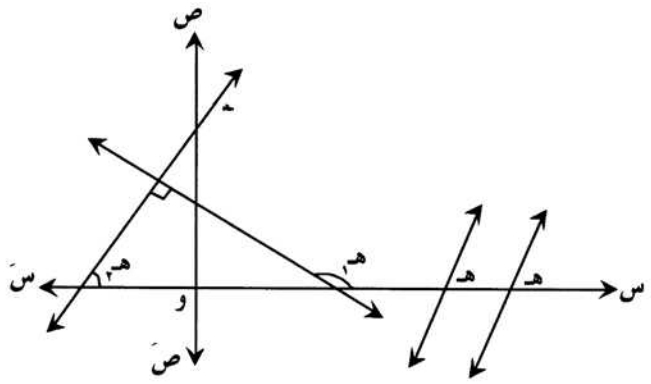
(٣) مستقيمان ميلاهما م١ ، م٢

(أ) فإذا توازى المستقيمان فإن :

م١ = م٢

(ب) وإذا تعامد المستقيمان فإن :

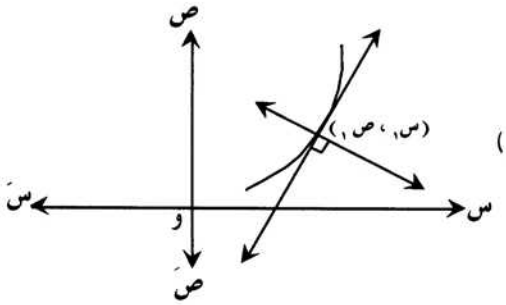
م١ × م٢ = = -١



شكل (٢)

(٤) ميل المماس للمنحنى ص = د (س)

عند النقطة (س١ ، ص١) = $\left(\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}\right)_{(س_1 ، ص_1)}$



شكل (٣)

(٥) ميل العمودى على المنحنى ص = د (س)

عند النقطة (س١ ، ص١) = $\frac{-١}{\left(\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}\right)_{(س_1 ، ص_1)}}$

(٦) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (س١ ، ص١) وميله = م هى :

ص - ص١ = م (س - س١)

• **ملاحظة** :العمودى على المنحنى هو العمودى على المماس للمنحنى عند نقطة التماس .

مثال (١) :

أوجد معادلة كل من المماس والعمودى عليه للمنحنى :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س - ٣ ص + ٢ = ٠ عند النقطة (-٢ ، ١)

الحل

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٢س - ٣ ص + ٢ = ٠ وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore$ ٢ س + ٢ ص $\frac{ح ص}{ح س}$ + ٢ − ٣ $\frac{ح ص}{ح س}$ = ٠

$\frac{ح ص}{ح س}$ (٢ص − ٣) = −٢س − ٢

$\therefore$ $\frac{ح ص}{ح س}$ = $\frac{-٢ س - ٢}{٢ ص - ٣}$

$\therefore$ ميل المماس = ($\frac{ح ص}{ح س}$)$_{(-٢، ١)}$ = $\frac{٤ - ٢}{٣ - ٢}$ = −٢

، ميل العمودى = $\frac{١}{٢}$

معادلة المماس : ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

ص − ١ = −٢ (س + ٢)

ص − ١ = −٢ س − ٤

٢س + ص + ٣ = ٠

معادلة العمودى : ص −١ = $\frac{١}{٢}$ (س + ٢)

٢ص −٢ = س + ٢

س − ٢ص + ٤ = ٠

مثـــال (٢) :

أوجد معادلة كل من المماس والعمودى عليه للمنحنى :

ص = ظا س عند س = $\frac{ط}{٤}$ (ط ≈ $\frac{٢٢}{٧}$)

الحـــل

ص = ظا س

(ص)$_{س}$ = $\frac{ط}{٤}$ = ظا $\frac{ط}{٤}$ = ١

$\therefore$ نقطة التماس هى ($\frac{ط}{٤}$ ، ١) أى ($\frac{١١}{١٤}$ ، ١)

$$ص = ظاس = \frac{جا\ س}{جتا\ س}$$

$$\therefore \frac{د\ ص}{د\ س} = \frac{جتا\ س \times جتا\ س - جا\ س \times -جا\ س}{جتا^{٢}س} = \frac{١}{جتا^{٢}س} = قا^{٢}س$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = \left(\frac{د\ ص}{د\ س}\right)_{س=\frac{ط}{٤}} = قا^{٢}\frac{ط}{٤} = ٢$$

$$\therefore \text{ميل العمودى} = -\frac{١}{٢}$$

معادلة المماس : $\therefore$ $ص - ص_{١} = م\ (س - س_{١})$

$$\therefore ص - ١ = ٢\ (س - \frac{١١}{١٤})$$

$$\text{أى } ص - ١ = ٢س - \frac{١١}{٧}$$

$$\text{أى } ٧ص - ٧ = ١٤ س - ١١$$

$$\therefore \text{معادلة المماس } ١٤ س - ٧ ص - ٤ = ٠$$

معادلة العمودى : $ص - ١ = -\frac{١}{٢}\ (س - \frac{١١}{١٤})$

$$\text{أى } ٢ص - ٢ = -س + \frac{١١}{١٤}$$

$$\text{أى } ٢٨ ص - ٢٨ = -١٤ س + ١١$$

$$\therefore \text{معادلة العمودى } ١٤ س + ٢٨ ص - ٣٩ = ٠$$

قاعدة هامة : من المثال السابق نجد أنه :

إذا كان ص = ظا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = قا^{٢}س

مثـــال (٣) :

أوجد معادلة المماسات للمنحنى ص = س^{٣} - ٣ س + ٥ والموازية للمستقيم ٩ س - ص = ١

الحـــل

∵ ص = س^{٣} - ٣ س + ٥

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٣ س^{٢} - ٣ ميل المماس عند أى نقطة م$_{١}$ = ٣ س^{٢} - ٣

ميل المستقيم ٩ س - ص = ١ هو م$_{٢}$ = $\frac{-٩}{-١}$ = ٩

∵ المماس // المستقيم ∴ م$_{١}$ = م$_{٢}$

أى ٣ س^{٢} - ٣ = ٩

٣ س^{٢} = ١٢ س^{٢} = ٤ س = ± ٢

(ص)$_{س = ٢}$ = ٨ - ٦ + ٥ = ٧

(ص)$_{س = -٢}$ = - ٨ + ٦ + ٥ = ٣

∴ هناك مماسان الأول يمر بالنقطة (٢ ، ٧) والثانى يمر بالنقطة (-٢ ، ٣)

معادلة المماس الأول ص - ٧ = ٩ (س - ٢) أى ٩ س - ص - ١١ = ٠

معادلة المماس الثانى ص - ٣ = ٩ (س + ٢) أى ٩ س - ص + ٢١ = ٠

مثـــال (٤) :

أثبت أن المنحنيين ص = س^{٢} − س + ٢ ، ص = ٣ س − س^{٢} متماسان ، ثم أوجد معادلة المماس المشترك لهما .

الحـــل

∵ ص = س^{٢} − س + ٢ ، ص = ٣ س − س^{٢}

∴ س^{٢} − س + ٢ = ٣ س − س^{٢}

∴ ٢ س^{٢} − ٤ س + ٢ = ٠

أى س^{٢} − ٢ س + ١ = ٠ (س − ١)^{٢} = ٠ س = ١

(ص)$_{س = ١}$ = ٢ المنحنيان يتقاطعان فى النقطة (١ ، ٢) ..... (١)

ص = س^{٢} − س + ٢ $\frac{ح ص}{ح س}$ = ٢ س − ١

ميل المماس للمنحنى الأول م$_{١}$ = ($\frac{ح ص}{ح س}$)$_{(١ ، ٢)}$ = ٢ − ١ = ١

∵ ص = ٣ س − س^{٢} ∴ $\frac{ح ص}{ح س}$ = ٣ − ٢ س

ميل المماس للمنحنى الثانى م$_{٢}$ = ($\frac{ح ص}{ح س}$)$_{(١ ، ٢)}$ = ٣ − ٢ = ١

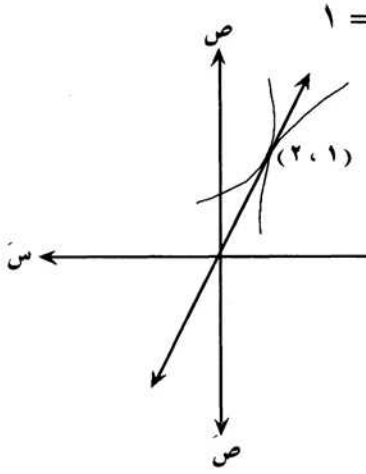
∴ م$_{١}$ = م$_{٢}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) المنحنيان متماسان

عند النقطة (١ ، ٢)

معادلة المماس المشترك ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

ص − ٢ = ١ (س − ١) أى س − ص + ١ = ٠



تمارين (٣-١)

(١) أوجد معادلتى المماس والعمودى عليه لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة :

(أ) $س^{٣} - ٩س^{٢} - ص^{٢} + ٢٧س - ٢ص - ٢٨ = ٠$ عند النقطة (٤ ، -٢)

(ب) $ص^{٢} = \frac{٨}{١ + س}$ عند النقطة (١ ، -٢)

(جـ) $س^{٢} ص^{٢} - ٢س - ٤ ص + ١ = ٠$ عند النقطة (-١ ، ١)

(د) $ص = جا ٢ س - جتا ٤ س$ عند $س = \frac{ط}{٤}$

(هـ) $ص = ظا س$ عند $س = \frac{ط}{٣}$

(و) $ص = جا س + جتا س$ عند $س = \frac{٣ ط}{٤}$

(٢) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $س^{٢} + ص^{٢} + ٣س + ص = ٠$ والتى عندها يكون المماس عموديًا على المستقيم $٣ص + س + جـ = ٠$

(٣) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^{٣} - ٤ س + ٥$ التى يكون المماس موازيًا للمستقيم $س + ص + ٢ = ٠$

(٤) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٦$ والتى عندها يكون المماس عموديًا على المستقيم $٣س - ٦ص = ٧$

(٥) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى $س ص = ٨$ والذى يوازى المستقيم $ص + ٢س = ٩$

(٦) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى $س^{٢} + ص^{٢} = ٥٢$ الموازيين للمستقيم $٢س + ٣ص = جـ$

(٧) أوجد النقط التى على المنحنى $ص = ظا \frac{س}{٢}$ وعندها يكون المماس موازيًا للمستقيم $٧س - ٧ص + ٤ = ٠$ حيث $٠ < س < ٢ ط$

(٨) إذا كان المستقيم $١٣ س - ص - ٧ = ٠$ يمس المنحنى $ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}$ عند النقطة (١ ، ٦) فما قيمة أ ، ب .

(٩) إذا كان المستقيم س + ص = ٣ يمس المنحنى ص = أ $س^{٣}$ + ب $س^{٢}$ - ٢س + ٦ عند النقطة (١ ، ٢) فما قيمة كل من أ ، ب .

(١٠) أثبت أن المنحنيين ص = ٣ $س^{٢}$ - ٥ س - ٢ ، ص = $س^{٢}$ - ٣س - ٢ يتقاطعان على التعامد عند النقطة (١ ، -٤) .

(١١) أوجد قيم أ ، ب ، جـ حتى يكون لمنحنيى الدالتين ص = أ $س^{٣}$ + ب س ، ص = جـ $س^{٢}$ - س مماس مشترك عند النقطة (-١ ، ٢) وأوجد معادلة المماس المشترك .

(١٢) أثبت أن المنحنيين ص = $س^{٢}$ + ٦س + ٥ ، ص = $س^{٣}$ - $س^{٢}$ - س + ١ متماسان عند النقطة (-١ ، ٠) وأوجد معادلة المماس المشترك لهما .

(١٣) أوجد النقطة الواقعة على المنحنى ص = $س^{٣}$ والتى يمر المماس للمنحنى عندها بالنقطة (٤ ، ٠) .

(١٤) أوجد النقط على المنحنى $س^{٢}$ + س ص + $ص^{٢}$ = ٣ التى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا لمحور الصادات .

(ثانيا) المعدلات الزمنية المرتبطة

مما سبق نعلم أنه إذا كان المتغير التابع ص يرتبط بالمتغير المستقل س ، أى ص = د (س) ، فإن $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ هو معدل تغير ص بالنسبة إلى س .

غير أن هناك حالات أخرى كثيرة فيها ارتباط بين عدة متغيرات ويكون كل من هذه المتغيرات دالة لمتغير آخر فإذا أوجدنا معدل التغير لهذه المتغيرات بالنسبة لمتغير آخر (الزمن مثلاً) فإننا نحصل على علاقة تسمى بالمعدلات الزمنية المرتبطة .

فإذا كان ص = د (س) ، س دالة فى الزمن ن ، أى س = ر (ن) ، فإن ص تكون دالة فى الزمن حيث ص = د (ر (ن)) ومن قاعدة التسلسل (دالة الدالة) يكون :

$$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى ن}} = \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} \cdot \frac{\text{ى س}}{\text{ى ن}}$$

فمثلاً إذا كان ص = ٣ س^{٢} - ٥ س فإن :

$$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى ن}} = \frac{\text{ى}}{\text{ى س}} (٣ \text{ س}^{٢} - ٥ \text{ س}) \frac{\text{ى س}}{\text{ى ن}}$$

$$= (٦ \text{ س} - ٥) \frac{\text{ى س}}{\text{ى ن}} = ٦ \text{ س} \frac{\text{ى س}}{\text{ى ن}} - ٥ \frac{\text{ى س}}{\text{ى ن}}$$

مثـــال (١)

تتحرك نقطة على المنحنى $س^{٢} + ص^{٢} - ٥ س + ٣ ص - ٦ = ٠$ وكان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن ن عند النقطة (١ ، ٢) يساوى ٣ أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن ن .

الحـــل

$س^{٢} + ص^{٢} - ٥ س + ٣ ص - ٦ = ٠$

بالاشتقاق الضمنى بالنسبة للزمن ينتج أن :

$$٢ س \frac{ى س}{ى ن} + ٢ ص \frac{ى ص}{ى ن} - ٥ \frac{ى س}{ى ن} + ٣ \frac{ى ص}{ى ن} = \text{صفر}$$

$\frac{ى س}{ى ن} = ٣$ عند (١ ، ٢)

$$\therefore (٢ \times ١ \times ٣) + (٢ \times ٢) \frac{ى ص}{ى ن} - (٥ \times ٣) + ٣ \frac{ى ص}{ى ن} = ٠$$

$$٧ \frac{ى ص}{ى ن} - ٩ = ٠ \qquad ٧ \frac{ى ص}{ى ن} = ٩ \qquad \frac{ى ص}{ى ن} = \frac{٩}{٧}$$

مثـــال (٢)

تزداد مساحة قرص دائرى بمعدل ٠,٢ سم^{٢} / ث فبأى معدل يزداد طول نصف قطره عندما يكون طول نصف القطر ٧ سم ، ط $\simeq \frac{٢٢}{٧}$

الحـــل

$م = ط \, نو^{٢}$ $\therefore \frac{ى م}{ى نو} = ٢ ط \, نو \frac{ى نو}{ى ن}$ ، $\therefore \frac{ى م}{ى ن} = \frac{ى م}{ى نو} \cdot \frac{ى نو}{ى ن}$

$$\therefore \frac{ى م}{ى ن} = ٢ ط \, نو \frac{ى نو}{ى ن} \quad \therefore ٠,٢ = ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \frac{ى نو}{ى ن}$$

$$\therefore \frac{ى نو}{ى ن} = \frac{٢}{١٠ \times ٢ \times ٢٢} = \frac{١}{٢٢٠} \text{ سم / ث}$$

مثـــال (٣) :

يسير رجل طوله ١,٥ متر بسرعة ٢ متر / ث مبتعداً عن عمود إضاءة معلق به مصباح يعلو ٣ متر عن سطح الأرض ، أوجد :

أولاً : معدل تغير طول ظل الرجل .

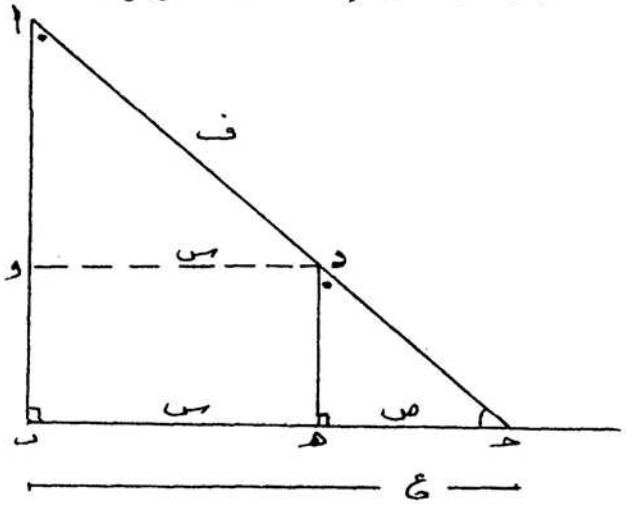
ثانيًا : سرعة تحرك نهاية ظل الرجل .

ثالثًا : معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح .

وذلك عندما يكون الرجل على بعد ٢ متر من عمود الإضاءة .

الحـــل

فى شكل (٣ - ١) يمثل $\overline{أ ب}$ عمود الإضاءة ، $\overline{د هـ}$ الرجل .



شكل (٣ - ١)

نفرض أن س = ب هـ المسافة التى تحركها الرجل ،

ص = هـ جـ طول ظل الرجل ،

ع = ب جـ المسافة التى تحركتها نهاية ظل الرجل ،

ف = أ د بعد رأس الرجل عن المصباح

أولاً : ∵ Δ أ ب جـ يشابه Δ د هـ جـ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ جـ}} \longleftarrow \frac{٣}{١,٥} = \frac{\text{س + ص}}{\text{ص}}$ ∴ ٢ ص = س + ص

∵ ص = س ∴ $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ١$ ∴ $\frac{\text{ى س}}{\text{ى ن}} = ٢$ ، $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى ن}} = \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} \cdot \frac{\text{ى س}}{\text{ى ن}}$

∴ $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى ن}}$ = ١ × ٢ = ٢ متر / ثانية **وهو المطلوب أولاً**

ثانيًا :

من تشابه Δ Δ أ ب جـ ، د هـ جـ

. $\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ جـ}} \longleftarrow \frac{٣}{١,٥} = \frac{\text{ع}}{\text{ص}}$

. ٢ ص = ع ∴ ٢ $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى ع}} = ١$ أى $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى ع}} = \frac{١}{٢}$

. $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى ن}} = ٢$ ، $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى ن}} = \frac{\text{ى ص}}{\text{ى ع}} \cdot \frac{\text{ى ع}}{\text{ى ن}}$

٢٠ = $\frac{١}{٢} \times \frac{\text{ى ع}}{\text{ى ن}}$ ∴ $\frac{\text{ى ع}}{\text{ى ن}}$ = ٤ متر / ث **وهو المطلوب ثانيًا**

ثالثًا :

Δ أ و د فيه (أ د)^{٢} = (أ و)^{٢} + (د و)^{٢} ∴ ف^{٢} = س^{٢} + $\frac{٩}{٤}$

∴ [ف^{٢}]$_{س=٢}$ = ٤ + $\frac{٩}{٤}$ = $\frac{٢٥}{٤}$ ∴ [ف]$_{س=٢}$ = $\frac{٥}{٢}$ متر

. . ف^{٢} = س^{٢} + $\frac{٩}{٤}$ ∴ ٢ ف $\frac{\text{ى ف}}{\text{ى س}}$ = ٢ س

$\frac{\text{ى ف}}{\text{ى س}} = \frac{\text{س}}{\text{ف}}$

عندما س = ٢ ، ف = $\frac{٥}{٢}$ فإن

$$\frac{ى ف}{ى س} = \frac{٢}{\frac{٥}{٢}} = \frac{٤}{٥}$$

$$\therefore \frac{ى ف}{ى ن} = \frac{ى ف}{ى س} \times \frac{ى س}{ى ن}$$

$$\therefore \frac{ى ف}{ى ن} = \frac{٤}{٥} \times ٢ = \frac{٨}{٥} \text{ متر / ث}$$

وهو المطلوب ثالثًا

مثـــال (٤) :

$\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$ طريقان متلاقيان يحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° تحركت سيارة على الطريق $\overleftarrow{أ ب}$ من نقطة أ بسرعة ٤٠ كم / ساعة وبعد ١٠ دقائق تحركت سيارة أخرى على الطرق $\overleftarrow{أ جـ}$ من نقطة أ بسرعة ٦٠ كم / ساعة . أوجد معدل تباعدهما بعد مضى ٢٠ دقيقة من تحرك السيارة الثانية .

الحـــل

المسافة التى تحركتها السيارة الأولى قبل تحرك السيارة الثانية =

$$= ٤٠ \times \frac{١٠}{٦٠} = \frac{٢٠}{٣} \text{ كم}$$

نفرض أن السيارتان تحركتا معًا زمن = ن ساعة

، فتكون المسافة التى قطعتها السيارة الأولى من بدء حركتها .

$$أ ى = ٤٠ ن + \frac{٢٠}{٣}$$

والمسافة التى تحركتها السيارة الثانية أ هـ = ٦٠ ن

وإذا كان البعد بين السيارتين = ف . من المثلث أ ء هـ

ف٢ = (أ ء)٢ + (أ هـ)٢ - ٢ أ ء . أ هـ جتا ٦٠

$= (٤٠ن + \frac{٢٠}{٣})^{٢} + (٦٠ن)^{٢} - ٢(٤٠ن + \frac{٢٠}{٣})(٦٠ن) \times \frac{١}{٢}$

$= ١٦٠٠ن^{٢} + \frac{١٦٠٠}{٣}ن + \frac{٤٠٠}{٩} + ٣٦٠٠ن^{٢} - ٢٤٠٠ن^{٢} - \frac{١٢٠٠}{٣}ن$

$ف^{٢} = ٢٨٠٠ن^{٢} + \frac{٤٠٠}{٣}ن + \frac{٤٠٠}{٩}$ ∴ السيارتين تحركتا معا زمن = $\frac{٢٠}{٦٠} = \frac{١}{٣}$ ساعة

$\therefore [ف^{٢}]_{ن=\frac{١}{٣}} = \frac{٢٨٠٠}{٩} + \frac{٤٠٠}{٩} + \frac{٤٠٠}{٩} = \frac{٣٦٠٠}{٩} = ٤٠٠$

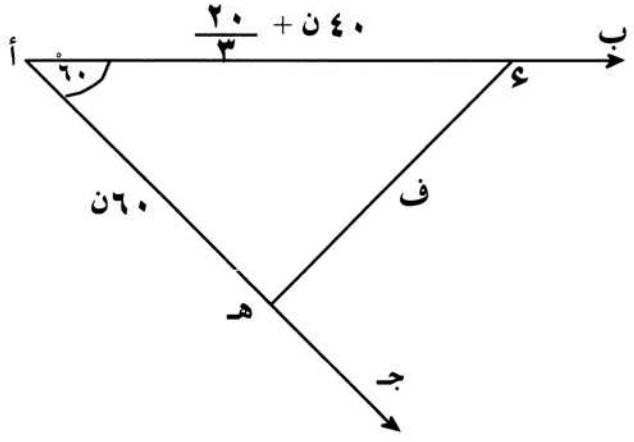
$\therefore [ف^{٢}]_{ن=\frac{١}{٣}} = ٢٠$ كم

∴ $ف^{٢} = ٢٨٠٠ن^{٢} + \frac{٤٠٠}{٣}ن + \frac{٤٠٠}{٩}$ وباشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن ن

$\therefore ٢ف \frac{ى ف}{ى ن} = ٥٦٠٠ن + \frac{٤٠٠}{٣}$ ، ∴ ف = ٢٠ عندما ن = $\frac{١}{٣}$

$\therefore ٢ \times ٢٠ \frac{ى ف}{ى ن} = \frac{٥٦٠٠}{٣} + \frac{٤٠٠}{٣} = ٢٠٠٠$

$\therefore \frac{ى ف}{ى ن} = \frac{٢٠٠٠}{٤٠} = ٥٠$ كم / ساعة



شكل (٣ - ٢)

تمارين (٣-٢)

١ - تتحرك نقطة على المنحنى $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٧$ وكان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (-١ ، ٣) يساوى ١,٠ أوجد : معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة .

٢ - تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى $ص = س^{٢} + ٤ س - ٣$ عين موضع النقطة عند اللحظة التى تكون فيها سرعة إحداثيها الصادى ضعف سرعة إحداثيها السينى .

٣ - تتحرك نقطة (س ، ص) على الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س - ٨ ص = ١٠٨$ عين موضع النقطة عند اللحظة التى يكون فيها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن مساويًا لمعدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن .

٤ - قطعة من المعدن مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٠ سم تنكمش بالتبريد بحيث يظل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٢٠ سم ، فإذا كان الطول ينكمش بمعدل ٠,٠٢٥ سم / ث عندما يكون العرض ٨٠ سم ، أحسب معدل تغير المساحة عند هذه اللحظة .

٥ - سقط حجر فى ماء ساكن فتكونت موجة دائرية يتزايد نصف قطرها بمعدل ٢ سم / ث أوجد معدل الزيادة فى مساحة سطح الموجه فى نهاية ١٠ ثوانى .

٦ - يستند سلم طوله ٦,٥ متر بأحد طرفيه على أرض أفقية وبطرفه الآخر على حائط رأسى . فإذا إنزلق الطرف السفلى للسلم مبتعداً عن الحائط بمعدل ٣٠ سم / دقيقة عندما يكون على بعد ٢,٥ متر من الحائط . أوجد عندئذ معدل إنخفاض الطرف العلوى للسلم . ثم أوجد بعد الطرف العلوى للسلم عن الأرض عندما يتحرك الطرف العلوى والطرف السفلى بنفس المعدل .

٧ - وضع مصباح كشاف على ارتفاع ٨ أمتار فوق طريق يسير عليه رجل طوله ١,٦ متر مبتعداً عن الضوء ٢ متر / دقيقة . أوجـد :

(أ) معدل إزدياد طول ظل الرجل . (ب) سرعة تحرك نهاية ظل الرجل .

٨ - ونش رأسى طوله ٦ أمتار يتحرك بسرعة ٥ أمتار / ثانية فى اتجاه مصباح على ارتفاع ١٦ متراً ، أوجـد :

(أ) معدل تحرك نهاية ظل الونش .

(ب) معدل تغير طول ظل الونش .

(جـ) معدل تغير بعد نهاية الونش العليا عن المصباح عندما يكون الونش على بعد ١٠ أمتار من قاعدة المصباح .

٩ - إذا كان ح المساحة المحصرة بين دائرتين متحدتى المركز نصفى قطريهما نق١ ، نق٢ حيث نق٢ > نق١ ، فأوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن عند اللحظة التى عندها نق١ = ٤ سم ويتزايد معدل ٠,٢ سم / ث ، نق٢ = ٧ سم ويتناقص بمعدل ٠,١ سم / ث

١٠- فى لحظة ما كان طولا ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية هما ٨ سم ، ٦ سم إذا كان كان الضلع الأول ينقص بمعدل ١ سم / دقيقة وكان الضلع الثانى يزداد بمعدل ٢ سم / دقيقة فأوجد معدل التغير فى مساحة المثلث بعد دقيقتين .

١١- $\overleftarrow{أجـ}$ ، $\overleftarrow{بجـ}$ طريقان متعامدان ، أ جـ = ٩٠ متراً ، ب جـ = ٧٠ متراً . يسير رجلان الأول من أ نحو جـ بسرعة منتظمة ٦ أمتار / ث والثانى من ب نحو جـ بسرعة منتظمة ٨ أمتار / ث أثبت أن البعد ف بين الرجلين بعد مضى ن ثانية من لحظة إنطلاقهما معًا يعطى بالعلاقة ف^{٢} = ١٠٠ (ن^{٢} - ٢٢ ن + ١٣٠) ثم إستنتج معدل تغير ف بالنسبة إلى ن عندما ن = ٨ ثوانى .

١٢- فى الساعة الثامنة صباحًا كانت سفينة تقع على بعد ٦٠ كم شرق ميناء معين وتقترب منه بسرعة ١٠ كم / ساعة وفى الساعة التاسعة صباحًا خرجت من الميناء سفينة أخرى متجهة نحو الجنوب بسرعة ٣٠ كم / ساعة . أوجد معدل تغير البعد بين السفينتين فى الساعة العاشرة صباحًا وهل تقترب السفينتان أم تبتعداً حينئذ ؟

١٣- عمود إنارة طوله ١٥ متراً أعلاه مصباح قذفت كرة رأسيا إلى أعلى بسرعة ٥ أمتار / ث من مسافة قدرها ١٢ متراً من قاعدة العمود . أوجد معدل إبتعاد ظل الكرة على الأرض من قاعدة العمود عند منتصف الثانية الأولى .

١٤- كرة جوفاء يزداد نصف قطرها الداخلى بمعدل ١ سم / ث بحيث يبقى حجم مادة الكرة ثابتًا وذلك عند اللحظة التى يكون فيها طولاً نصفى قطريها ٣ ، ٩ سم . أوجد عند هذه اللحظة .

(أ) معدل تغير نصف قطرها الخارجى .

(ب) معدل تغير مساحة سطحها الخارجى .

(جـ) معدل تغير سمكها .

١٥- تتمدد قطعة من المعدن على هيئة متوازى مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٢ سم وارتفاعها ثلاثة أمثال عرضه بالتسخين بحيث تظل أبعادها محتفظة بهذه النسبة فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٠,٦ سم^{٣} / دقيقة عندما يزداد العرض بمعدل ٠,٠١ سم / دقيقة فأوجد أبعاد قطعة المعدن .

١٦- حبل من الصلب على شكل إسطوانة دائرية قائمة يتمدد بالتسخين بحيث يزداد طوله بمعدل ٠,٠٠٥ سم / دقيقة ويزداد طول قطر مقطعه الدئرى بمعدل ٠,٠٠٢ سم / دقيقة أوجد بدلالة ط معدل تغير حجم الحبل بالنسبة للزمن عندما يكون طوله ٤٠ سم وطول قطر مقطعه ٢ سم .

الباب الرابع

سلوك الدالة ورسم منحناها

(بنـد ٤ - ١) :

سوف تقتصر فى هذا الباب على دراسة الدوال المتصلة على فترة مجالها .

تزايد وتناقص الدوال :

• تعريف (١) :

يقال أن الدالة د متزايدة فى الفترة] أ ، ب [إذا كانت معرفة فيها وكان د (س$_{١}$) < د (س$_{٢}$) لكل س$_{١}$ < س$_{٢}$ فى هذه الفترة .

ويقال أنها مطردة التزايد إذا كان د (س$_{١}$) ≤ د (س$_{٢}$) لكل س$_{١}$ < س$_{٢}$ فى هذه الفترة .

وهذا التعريف يعنى أن الدالة تكون متزايدة فى فترة ما إذا كانت قيمتها تتزايد مع تزايد س فى هذه الفترة . وتكون مطردة التزايد إذا كانت قيمتها تتزايد أو تثبت مع تزايد س .

• تعريف (٢) :

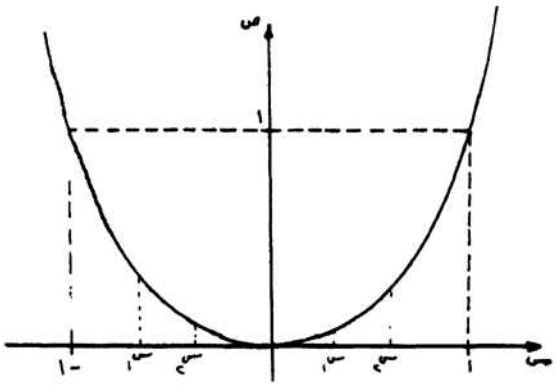
يقال أن الدالة د متناقصة فى الفترة] أ ، ب [إذا كانت معرفة فيها وكان د (س$_{١}$) > د (س$_{٢}$) لكل س$_{١}$ < س$_{٢}$ فى هذه الفترة .. ويقال أنها مطردة التناقص إذا كان د (س$_{١}$) ≤ د (س$_{٢}$) لكل س$_{١}$ < س$_{٢}$ فى هذه الفترة .

وهذا التعريف يعنى أن الدالة تكون متناقصة فى فترة ما إذا كانت قيمتها تتناقص مع تزايد س فى هذه الفترة وتكون مطردة التناقص إذا كانت قيمتها تتناقص أو تثبت مع تزايد س .

مثـال (١) :

الدالة د (س) = س^{٢} متزايدة فى الفترة] ٠ ، ١ [وذلك لأنه

شكل (٤ - ١)



إذا كان $س_1 < س_2$ وكلا من $س_1$ ، $س_2$ ∈] ٠ ، ١ [

فإن د ($س_1$) = $س_1^2$ ، د($س_2$) = $س_2^2$ ، $س_1^2 < س_2^2$ أى أن د ($س_1$) < د ($س_2$)

كما يتضح من شكل (٤ - ١) وتكون الدالة متزايدة فى هذه الفترة .

أما فى الفترة] -١ ، ٠ [فإنه إذا كان $س_1 < س_2$ وكلا من $س_1$ ، $س_2$ ∈] -١ ، ٠ [

فإن د ($س_1$) = $س_1^2$ ، د($س_2$) = $س_2^2$ ويكون $س_1^2 > س_2^2$ أى أن د ($س_1$) > د ($س_2$) كما يتضح من شكل (٤ - ١) وتكون الدالة متناقصة فى هذه الفترة .

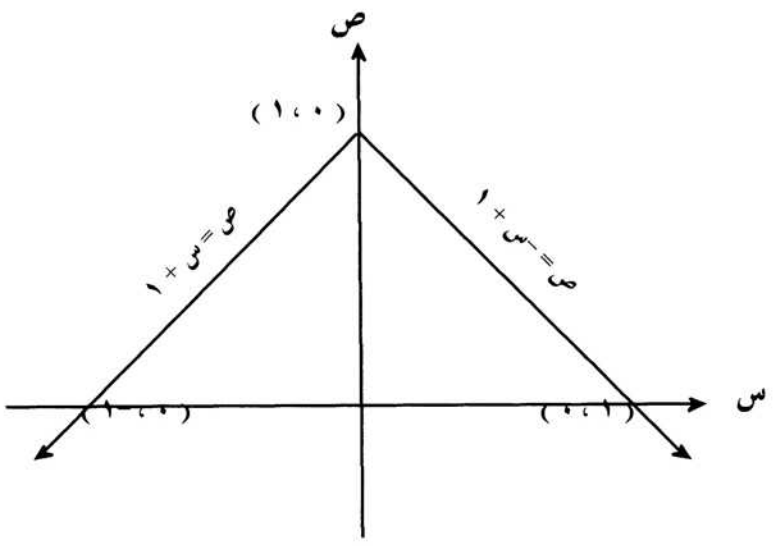
مثال (٢) :

الدالة د (س) = - | س | + ١ .

من تعريف دالة المقياس نجد أن :

$$د(س) = \begin{cases} -س + ١ & \text{عندما } س \geq . \\ س + ١ & \text{عندما } س < . \end{cases}$$

أى أنه فى الفترة] ٠ ، ∞ [تكون د (س) = - س + ١ والمنحنى الذى يمثل الدالة فى هذه الفترة هو الشعاع الخارج من النقطة (٠ ، ١) والمار بالنقطة (١ ، ٠) كما فى شكل (٤ - ٢)



شكل (٤ - ٢)

والدالة د (س) = − س + ١ متناقصة فى الفترة] ٠ ، ∞ [لأنه إذا كان س١ < س٢ ، س١ ، س٢ ∈] ٠ ، ∞ [فأن − س١ > − س٢ ، ومن ثم يكون − س١ +١ > − س٢ + ١ ، أى أن د (س١) < د (س٢)

وبالمثل يمكن توضيح أن هذه الدالة متزايدة فى الفترة] −∞ ، ٠ [

★ ملاحظة ١ :

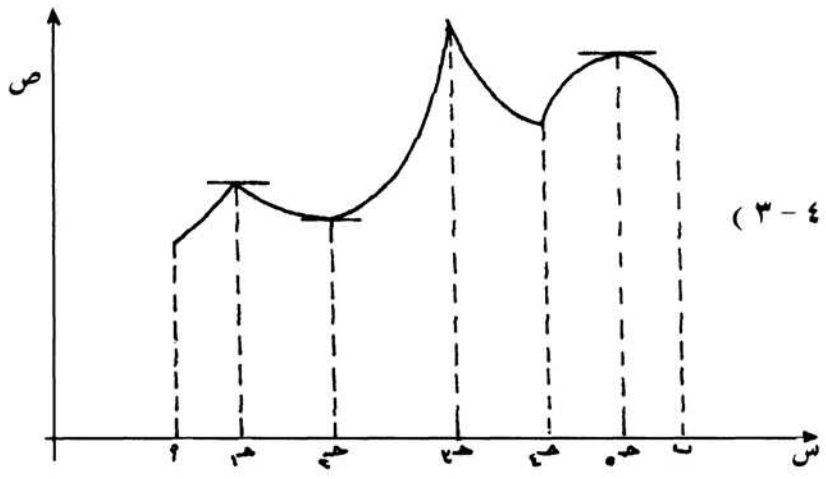
يمكن تعريف التزايد والتناقص باستبدال الفترات المفتوحة بفترات مغلقة أو حتى نصف مغلقة وتبقى التعريفات كما هى .

★ ملاحظة ٢ :

فى المثال الأول يلاحظ أن النقطة س = ٠ تفصل بين الفقرة] ٠ ، ١ [وفيها تتزايد الدالة والفترة] − ١، ٠ [وفيها تتناقص الدالة . أى أن الدالة تتزايد على يمين النقطة س = ٠ وتتناقص على يسارها . وهذا يعنى أن قيمة الدالة عند النقطة س = ٠ تكون أقل ما يمكن بالنسبة لقيمها على يمين ويسار النقطة س = ٠ ونلاحظ هذا أيضا فى المثال الثانى ولكن بشكل مخالف فالنقطة س = ٠ تفصل بين فترتين وتتزايد الدالة فى الفترة التى تقع على يسارها وتتناقص فى الفترة التى تقع على يمينها . وهذا يعنى أن قيمة الدالة عند س = ٠ تكون أكبر ما يمكن بالنسبة لقيمها على يمين ويسار النقطة س = ٠

مثال (٣) :

لنعتبر الدالة المعطاه بواسطة المنحنى المرسوم فى شكل (٤ - ٣)



شكل (٤ - ٣)

هـذا المنحنى يمثـل دالة مجـالهـا الفترة [أ ، ب] وهذه الدالة متزايدة فى الفترة [أ ، جـ١ [،] جـ٢ ، جـ٣ [،] جـ٤ ، جـ٥ [، متناقصة فى الفترات] جـ١ ، جـ٢ [،] جـ٣ ، جـ٤ [،] جـ٥ ، ب] .

ونقط الفصل بين فترات التـزايد والتنـاقـص متجـهين من اليسار إلى اليمين هى جـ١ ، جـ٣ ، جـ٥ أما النقطتين جـ٢ ، جـ٤ فهى نقط فصل بين فترة تناقص وفترة تزايد .

(بند ٤ - ٢) :

استخدام المشتقة الأولى لدراسة تزايد وتناقص الدالة :

يقـدم لنـا علم التـفـاضـل وسيلة بسيطة لتحديد فترات تزايد وتناقص الدالة القابلة للاشتقاق فى النظرية التالية :

نظرية (١) (بدون برهان) :

(I) إذا كـانت الـدالة د قـابلة للاشتـقاق فى الفترة] أ ، ب [وكانت متزايدة فى هذه الفترة فإن دَ (س) ≥ ٠ لكل س ∈] أ ، ب [.

(II) إذا كانت دَ (س) > ٠ فى الفترة] أ ، ب [فإن د (س) تكون متزايدة فى الفترة .

(III) إذا كـان دَ (س) ≥ ٠ فى الفـترة] أ ، ب [فإن د (س) تكون مطردة فى التـزايد فى هذه الفترة .

وبالمثل فى حالة التناقص :

(I) إذا كـانت الدالة د قابلة للاشتـقاق فى الفتـرة] أ ، ب [وكانت متناقصة فى هذه الفترة فإن دَ (س) ≤ ٠ (س) لكل س ∈] أ ، ب [

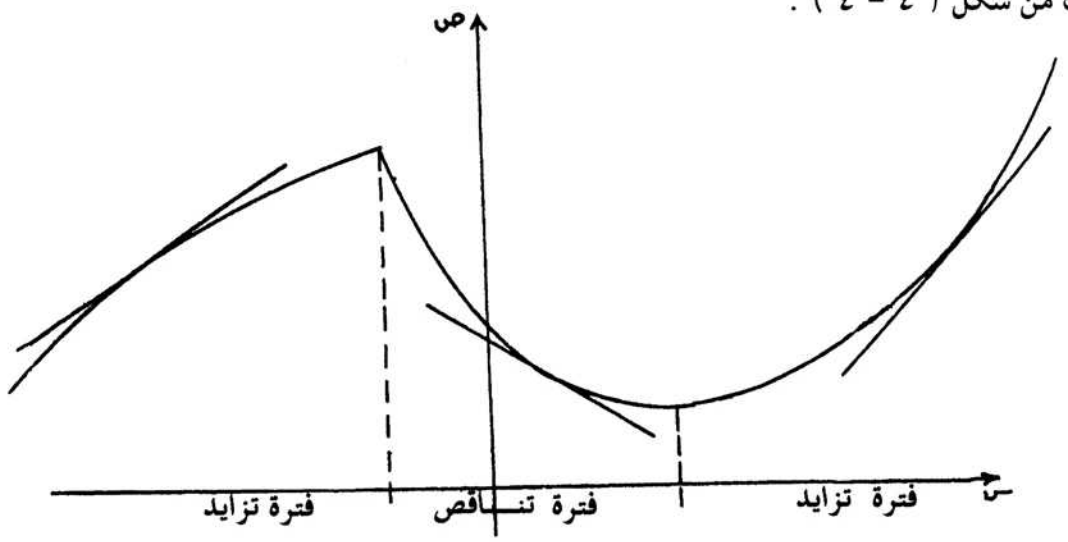
(II) إذا كانت دَ (س) < ٠ فى الفترة]أ ، ب [فإن د (س) تكون متناقصة فى هذه الفترة .

(III) إذا كان دَ (س) ≤ ٠ فى الفترة]أ، ب [فإن د (س) تكون مطردة التناقص فى هذه الفترة .

ومن هذه النظرية ينتج أنه لحساب فترات التزايد والتناقص لدالة د قابلة للاشتـقاق فعلينا حل المتباينة دَ (س) > ٠ لايجاد فترات التزايد . وحل المتباينة دَ (س) < ٠ لايجاد فترات التناقص .

★ **ملاحظة :**

بناء على النظرية السابقة وعلى المعنى الهندسى للمشتقة فإن الدالة تتزايد فى فترة إذا كان ميل المماس لمنحناها عند أى نقطة فى هذه الفترة موجبًا ، أى أن المماس يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، وتتناقص الدالة فى فترة إذا كان ميل المماس لمنحناها عند أى نقطة فى هذه الفترة سالبًا ، أى أن المماس يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ويتضح ذلك من شكل (٤ - ٤) .



شكل (٤ - ٤)

مثـال :

أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د (س) = س^{٣} - س^{٢} وحددها على خط الأعداد.

الحـل

د (س) = س^{٣} - س^{٢} ∴ دَ (س) = ٣س^{٢} - ٢س

لايجاد فترات التزايد نحل المتباينة دَ (س) > ٠

أى (٣س^{٢} - ٢س) > ٠

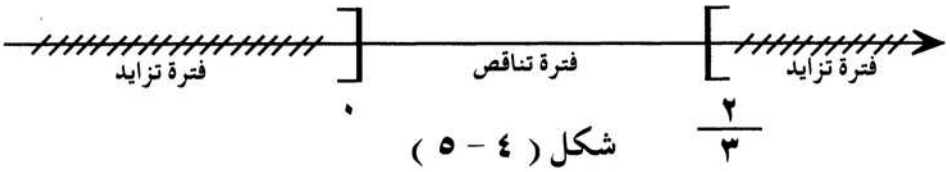
أى س (٣س - ٢) > ٠

وحسب قاعدة إشارة الدالة :

يكـون ٣س٢ - ٢س > ٠ لجـميـع قيـم س الحقيـقية فيما عدا القيم الواقعة بين جذرى المعادلة ٣س٢ - ٢س = ٠ أى س (٣س - ٢) = ٠ .

أى بين س = ٠ ، س = $\frac{٢}{٣}$ ، أى أن الدالة متناقصة على الفترة] ٠ ، $\frac{٢}{٣}$ [ومتزايدة على كل من الفترتين] - ∞ ، ٠ [،] ∞ ، $\frac{٢}{٣}$ [

شكل (٤ - ٥) يوضح فترات التزايد والتناقص بهذه الدالة



شكل (٤ - ٥)

تمارين (٤-١)

(١) عين فترات التزايد والتناقص للدوال التالية :

(I) ص = ١ - ٤س - س^{٢}

(II) ص = (س - ٢)^{٢}

(III) د (س) = (س + ٤)^{٣}

(IV) د (س) = س^{٢} (س - ٣)

(V) ص = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$

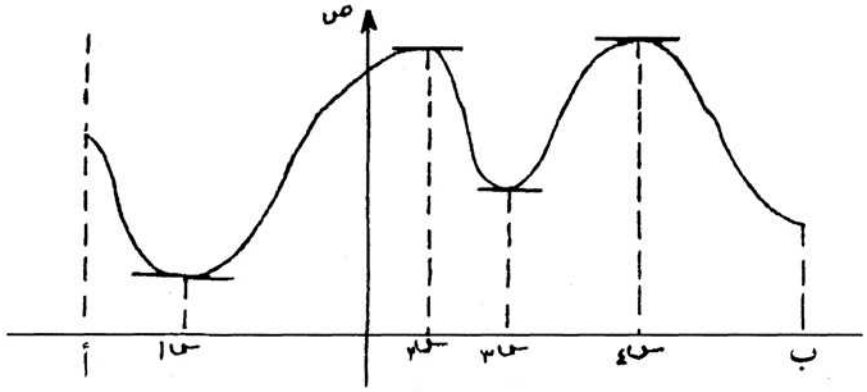
(VI) ص = $\frac{١}{٣}$ س - $\sqrt[٣]{\text{س}}$

(VII) ص = س | س |

(VIII) د (س) = { س^{٢} + ٢ عندما س ≥ ١ ؛ ٢س + ١ عندما س < ١ }

القيم العظمى والصغرى المحلية :

شكل (٤ - ٦) تمثل الدالة د المعرفة على الفترة [أ ، ب]يقال أن الدالة د عند كل من النقطتين س٢ ، س٤ ∈ [أ ، ب] قيمة عظمى محلية وأن لها عند كل من النقطتين س١ ، س٣ ∈ [أ ، ب] قيمة صغرى محلية .



شكل (٤ - ٦)

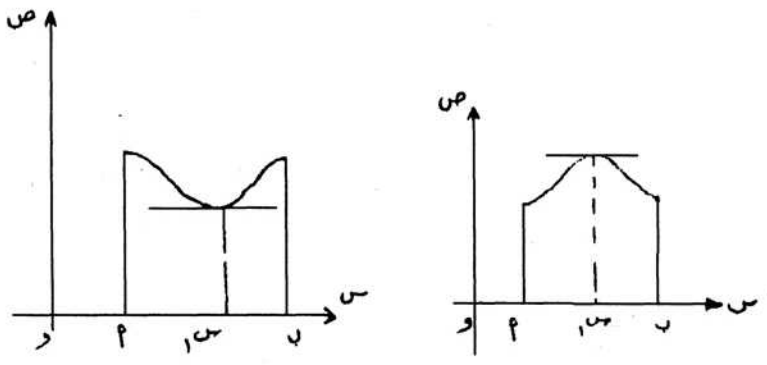
يمدنا علم التفاضل بمعلومات كافية فى بعض المعادلات لحساب النقط التى يكون عندها للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية .

نظرية (١) :

إذا كانت الدالة د المعرفة على الفترة] أ ، ب [قابلة للاشتقاق عند س١ ∈] أ ، ب [وكان للدالة قيمة عظمى أو صغرى محلية عند س١

فإن دَ (س١) = صفراً

انظر شكل (٤ - ٧)



شكل (٤ - ٧)

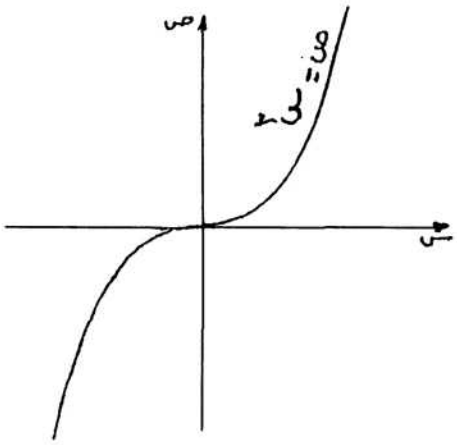
★ **ملاحظة :**

إذا كان دَ (س$_1$) = ٠ لدالة قابلة للاشتقاق عند س$_1$ فليس بالضرورة وجود قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية عند هذه النقطة .

وعلى سبيل المثال فإن الدالة د (س) = س^3

مشتقتها الأولى د (س) = ٣س^2 ≥ ٠

أى أن هذه الدالة متزايدة ومن ثم فلا يوجد نقط للدالة عندها قيم عظمى أو صغرى محلية بالرغم من أن دَ (٠) = ٠ انظر شكل (٤ - ٨)

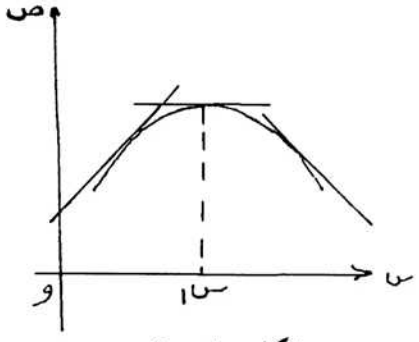


شكل (٤ - ٨)

وسوف نورد فيما يلى بدون برهان بعض النظريات التى تساعد على دراسة وجود قيم عظمى أو صغرى محلية .

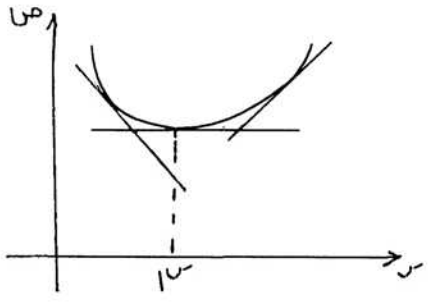
نظرية (٢) :

أولاً : إذا كانت الدالة د متصلة وكان دَ (س) ≥ ٠ لقيم س على يسار س$_1$ وقريبة جداً منها وكان دَ (س) ≥ ٠ بقيم س على يمين س$_1$ وقريبة جداً منها فإن س$_1$ تكون نقطة للدالة عندها قيمة عظمى محلية.



شكل (٤ - ٩)

ثانيًا : إذا كانت الدالة د متصلة وكان دَ (س) ≥ ٠ لقيم س على يسار س$_1$ وقريبة جداً منها وكان دَ (س) ≤ ٠ لقيم س على يمين س$_1$ وقريبة جداً منها فإن س$_1$ تكون نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية .



شكل (٤ - ١٠)

نظرية (٣):

(أولاً) إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق وكان :

د (س$_{١}$) = ٠ ، دً (س$_{١}$) < ٠ فإن س$_{١}$ تكون نقطة للدالة عندها قيمة عظمى محلية

(ثانياً) إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق وكان :

دَ (س$_{٢}$) = ٠ ، دً (س$_{٢}$) > ٠ فإن س$_{٢}$ تكون نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية

★ ملاحظات :

١ - تقدم لنا نظرية (٣) طريقة تساعد فى حالة تحقق شروطهما على اكتشاف النقط التى للدالة عندها قيمة عظمى أو صغرى محلية بسرعة دون اللجوء إلى حل المتباينتين دَ (س) > ٠ ، دَ (س) < ٠ لايجاد مناطق التزايد والتناقص كما فى نظرية (٢) .

٢ - شروط نظرية (٣) كافية لوجود نقط للدالة عندها قيم عظمى أو صغرى محلية ولكنها ليست ضرورية . بمعنى أنه توجد دوال لها قيمة عظمى أو صغرى محلية وبينما لاتحقق المشتقة الثانية الشروط المذكورة فى هاتين النظريتين . وفى هذه الحالة لابد من التحقق من وجود نقط للدالة عندها قيم عظمى أو صغرى باستخدام نظرية (٢) والمثال التالى يوضح ذلك

مثال : للدالة د (س) = س^{٤}

نلاحظ أن د (٠) = ٠

وإذا أخذنا قيماً لـ س قريبة جداً من الصفر فإن

د (س) = س^{٤} > ٠ أى

د (س) > د (٠)

دَ (س) = ٤س^{٣}

وعندما س < ٠ فإن دَ (س) < ٠

وعندما س > ٠ فإن دَ (س) > ٠

ومن ثم فإن النقطة س = ٠ نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية ، ومع ذلك فإن

دً (س) = ٤ × ٣س^{٢} = ١٢ س^{٢} ∴ دً (٠) = صفر وليست موجبة

مثـال :

أوجد النقط التى للدالة د (س) = س^{٤} − س^{٣} عندها قيم عظمى أو صغرى محلية .

الحـل

د (س) = س^{٤} − س^{٣}

∴ دَ (س) = ٤س^{٣} − ٣س^{٢}

= س^{٢} (٤س − ٣)

∴ دَ (س) = ٠ عندما س = ٠ أو س = $\frac{٣}{٤}$

دً (س) = ١٢ س^{٢} − ٦س

نبحث إشارة دً (س) عند كل من هاتين النقطتين

دً ($\frac{٣}{٤}$) = ١٢ ($\frac{٣}{٤}$)^{٢} − ٦ ($\frac{٣}{٤}$) = $\frac{٩}{٤}$ > ٠

أى أنه يوجد لدالة عند النقطة $\frac{٣}{٤}$ قيمة صغرى محلية .

وعند بحث دً (٠) نجد أن دً (٠) = ٠ وعلى ذلك لاتصلح هذه الطريقة لبحث نوع قيمة الدالة عند النقطة س = صفر ويجب اللجوء لبحث إشارة دَ (س) لقيم س قريبة جداً يسار ويمين الصفر ولتحقيق ذلك نعتبر أولاً أن س سالبة وقريبة جداً من الصفر

س^{٢} (٤س − ٣) < ٠ أى أن د (س) متناقصة قبل الصفر .

ثم نعتبر س موجبة وقريبة جداً من الصفر

س^{٢} (٤س − ٣) < ٠

لأن س^{٢} > ٠ ، ٤س − ٣ < ٠ ومن ثم فان الدالة د (س) تكون متناقصة أيضاً بعد الصفر مباشرة ومن ثم فليس للدالة عند نقطة س = ٠ قيمة عظمى أو صغرى محلية .

مثـال :

ابحث نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة ص = س + $\frac{١}{س}$ فى مجال تعريفها ثم أوجد قيم الدالة عند هذه النقط .

الحـــل

مجال الدالة هو ح - { ٠ }

د (س) = س + $\frac{١}{س}$ ، دَ (س) = ١ - $\frac{١}{س^{٢}}$

دَ (س) = ٠ يؤدى إلى ١ - $\frac{١}{س^{٢}}$ = ٠ ومنها س = ١ أو -١

دً (س) = $\frac{٢}{س^{٣}}$ ∴ دً (١) = ٢ > ٠ ، دً (-١) = -٢ < ٠

وعلى ذلك فإن للدالة قيمة عظمى محلية عند س = -١ ،

قيمة صغرى محلية عند س = ١

د (١) = ١ + $\frac{١}{١}$ = ٢ ، د (-١) = -١ - $\frac{١}{١}$ = -٢

★ ملاحظة :

فى المثال السابق نلاحظ أن قيمة الدالة عند نقطة القيمة العظمى المحلية أقل من قيمتها عند نقطة القيمة الصغرى المحلية وعلى ذلك فلا علاقة بين قيم الدالة عند نقط القيم العظمى والصغرى المحلية ونوعية هذه النقط .

(بند - ٤) :

القيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة فى فترة مغلقة

★ تعريف (١) :

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المغلقة [أ ، ب] فإن القيمة العظمى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أكبر قيمة فى مجموعة قيم الدالة .

{ د (س) : س ∈ [أ ، ب] }

أى أنها تلك القيمة ع بحيث أنه توجد نقطة س، ∈ [أ ، ب]

بحيث أن :

د (س،) = ع ، ع ≥ د (س) لكل س ∈ [أ ، ب]

★ تعريف (٢) :

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المغلقة [أ ، ب] فإن القيمة الصغرى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أصغر قيمة فى مجموعة قيم الدالة .

{ د (س) : س ∈ [أ ، ب] }

أى أنها تلك القيمة ص١ بحيث أنه توجد نقطة س٢ ∈ [أ ، ب] بحيث أن :

د (س٢) = ص١ ، ص١ ≥ د (س) لكل س ∈ [أ ، ب] .

★ **ملاحظة (١) :**

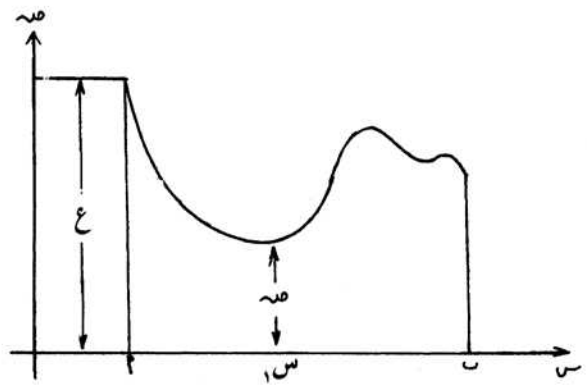
نلاحظ هناك أن القيمة العظمى (أو الصغرى) المحلية لدالة كانت قيمة عظمى (أو صغرى) للدالة فى جوار صغير أى فى جزء صغير من الفترة المعرفة عليها الدالة . أما القيمة العظمى (أو الصغرى) المطلقة للدالة فهى قيمة عظمى (أو صغرى) للدالة فى منطقة التعرف كلها .

مثـــال (١) :

بالنسبة للدالة المعطاة بالمنحنى المرسوم فى الشكل (٤ - ١١) على الفترة [أ ، ب] تكون أكبر قيمة للدالة فى الفترة [أ ، ب] هى قيمتها عند س = أ أى عند الطرف الأيسر من فترة تعريف الدالة .

أى أن ع = د (أ) .

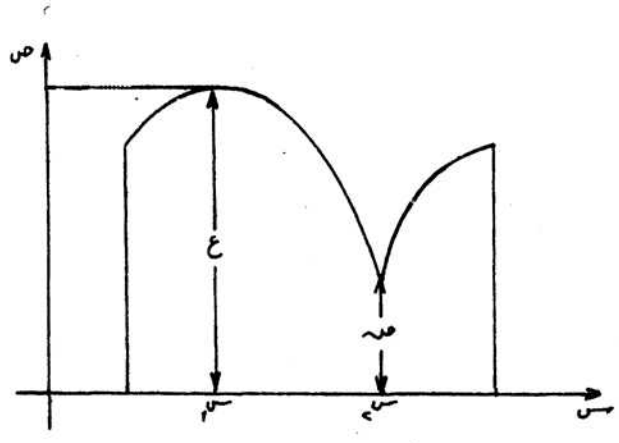
بينما أصغر قيمة للدالة فى الفترة [أ ، ب] هى قيمتها عند النقطة س١ ∈ [أ ، ب] ، أى أن ص١ = د (س١)



شكل (٤ - ١١)

مثـــال (٢) :

بالنسبة للدالة المعطاة فى الشكل (٤ - ١٢) بالمنحنى المرسوم على الفترة [أ ، ب] تكون أكبر قيمة للدالة فى الفترة [أ ، ب] هى قيمتها عند النقطة س١



شكل (٤ - ١٢)

أى أن ع = د (س$_{1}$) ، بينما أصغر قيمة للدالة فى هذه الفترة هى قيمتها عند س$_{2}$ ، أى أن ص$_{2}$ = د (س$_{2}$).

★ ملاحظة (٢) :

نلاحظ أن القيمة العظمى (أو الصغرى) المطلقة هى إحدى القيم العظمى (أو الصغرى) المحلية ولكنها أكبر (أو أصغر) هذه القيم جميعا .

★ تعريف ٣ :

يقال أن س$_{1}$ نقطة حرجة للدالة د (س) إذا كانت تحقق أحد الشرطين الآتيين :

(١) دَ (س$_{1}$) موجودة وتساوى صفر ، (٢) دَ (س$_{1}$) غير موجودة .

وعلى ذلك فإن نقط القيم العظمى والصغرى المحلية الواقعة داخل فترة تعريف الدالة تكون نقطًا حرجة لأنه إما أن تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق عندها أو أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق عندها ، ومن تكون مشتقتها مساوية للصفر .

★ مثال (٣) :

أثبت أن الدالة د (س) = $س^{\frac{1}{3}}$ لها نقطة حرجة عند الصفر

البرهان :

نحاول أن نوجد مشتقة للدالة عند س = ٠ باستخدام التعريف لكى نعرف هل هى موجودة وتساوى الصفر أو غير موجودة . لذلك نحسب النهاية :

$$\text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{هـ^{\frac{1}{3}}}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{١}{هـ^{\frac{2}{3}}}$$

والنهاية الأخيرة غير موجودة لا من اليمين و لا من اليسار .

(عدم وجود نهاية فى كلتا الحالتين)

وعلى ذلك فإن س = ٠ نقطة حرجة للدالة .

مثال (٤) :

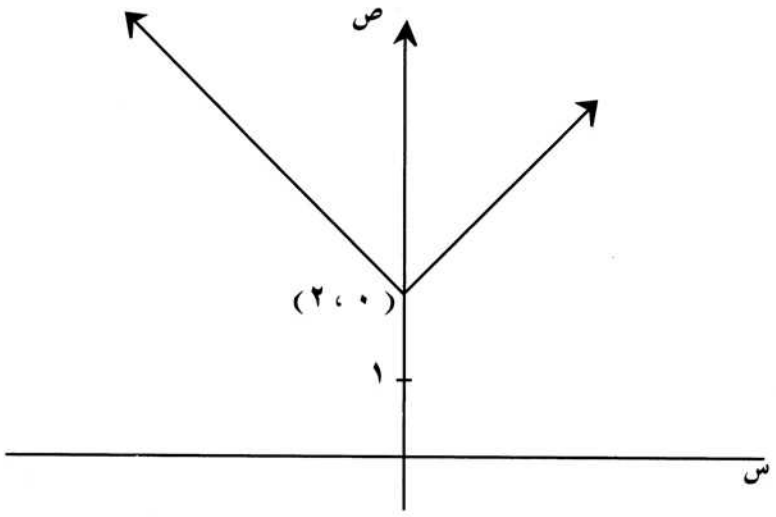
أثبت أن للدالة د (س) = |س| + ٢ نقطة حرجة عند س = ٠ ثم بين أنها نقطة قيمة صغرى محلية للدالة .

الحـــل

نكتب الدالة (باستخدام تعريف المقياس) على الصورة .

$$د(س) = \begin{cases} س + ٢ & \text{عندما } س \leq ٠ \\ -س + ٢ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$$

ومنحنى هذه الدالة موضح فى شكل (٤ - ١٣) . وهو عبارة عن شعاع يبدأ بالنقطة (٠ ، ٢)



شكل (٤ - ١٣)

وميله (١) وذلك عندما س $\leq$ ٠ ، أما عندما س $>$ ٠ فإنه عبارة عن شعاع يبدأ بالنقطة (٠ ، ٢)
وميله (-١) وكما مر علينا سابقًا عند دراسة تفاضل الدوال فإن دَ (٠^{+}) = ١ ، دَ (٠^{-}) = -١
أى أن دَ (٠) غير موجود وعلى ذلك فإن س = ٠ نقطة حرجة للدالة .

ولتبيان أنها نقطة قيمة صغرى محلية نلجأ لدراسة الدالة قبل الصفر مباشرة (أى عندما س $<$ ٠) وبعد الصفر مباشرة (أ عندما س $>$ ٠) فنجد أن :

دَ (س) = -١ $<$ ٠ عندما س $<$ ٠

دَ (س) = ١ $>$ ٠ عندما س $>$ ٠

وعلى ذلك فإن الدالة تتناقص قبل الصفر وتتزايد بعده ومن ثم فإن النقطة س = ٠ وتكون نقطة قيمة صغرى محلية .

حساب القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة :

إذا كانت د دالة معرفة على الفترة [أ ، ب] فإنه لحساب قيمتيها العظمى والصغرى المطلقة فى تلك الفترة فإننا نعين النقطة الحرجة لها ، أى النقط التى تكون الدالة عندها قابلة للاشتقاق ومشتقتها تساوى الصفر ولتكن هذه النقطة هى { ق$_{1}$ ، ق$_{2}$ ، ..... }

وكذلك النقط التى تكون الدالة عندها غير قابلة للاشتقاق ولتكن { ك$_{1}$ ، ك$_{2}$ ، ... }

ثم نوجد قيم الدالة عند هذه النقط وكذلك عند الطرفين أ ، ب فنحصل على مجموعة القيم .

{ د (ق$_{1}$) ، د (ق$_{2}$) ... و د (ك$_{1}$) ، د(ك$_{2}$) ... ، د (أ) ، د (ب) }

وتكون أكبر قيمة بين هذه القيم العظمى المطلقة للدالة . وأصغر قيمة بين هذه القيم هى القيمة الصغرى المطلقة للدالة .

مثال (٥) :

أوجد القيمة العظمى المطلقة للدالة والقيمة الصغرى المطلقة للدالة :

د (س) = س^{٤} – س^{٢} + ١ فى الفترة [–١ ، ١] .

الحل

باشتقاق الدالة وحل المعادلة دَ (س) = ٠ نحصل على دَ (س) = ٤س٣ – ٢س = ٠

ومجموعة الحلول لهذه المعادلة هى { ٠ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، – $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ }

مجموعة قيم الدالة عند نقطة مجموعة الحلول بالإضافة إلى قيمتها عند طرفى الفترة [–١ ، ١] هى :

{ د (٠) ، د ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$) ، د (– $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) ، د (–١) ، د (١) }

= { ١ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، ١ ، ١ } = { ١ ، $\frac{٣}{٤}$ }

ومن ثم فإن أكبر قيمة للدالة فى الفترة [–١ ، ١] هى ١ وتبلغها كل من النقط عند س = ٠ ، –١ ، ١ وأصغر قيمة للدالة هى $\frac{٣}{٤}$ وتبلغها عند كل من النقطتين $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

مثـال (٦) :

أحسب القيم العظمى المطلقة والقيم الصغرى المطلقة للدالة :

$$د (س) = \begin{cases} (س + ٣)^{٢} & \text{عندما} \quad س < ٠ \\ (س - ٣)^{٢} & \text{عندما} \quad س \geq ٠ \end{cases}$$

وذلك فى الفترة [-٢ ، ٢] .

الحـــل

من الجائز أن تكون النقطة س = ٠ نقطة حرجة نتيجة لتعريف الدالة بقاعدتين مختلفتين على يمين الصفر وعلى يساره ، ولذلك نحاول حساب المشتقة عند الصفر . وكما هو معتاد فى مثل هذه الحالات نحسب المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى كلاً على حدة .

$$دَ (٠^{+}) = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠^{+}} \frac{د (٠ + هـ) - د (٠)}{هـ} = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠^{+}} \frac{(هـ - ٣)^{٢} - (-٣)^{٢}}{هـ}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠^{+}} \frac{هـ^{٢} - ٦ هـ + ٩ - ٩}{هـ} = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠^{+}} (هـ - ٦) = - ٦$$

$$دَ (٠^{-}) = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \frac{د (٠ + هـ) - د (٠)}{هـ} = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \frac{(هـ + ٣)^{٢} - (-٣)^{٢}}{هـ}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠^{-}} (هـ + ٦) = ٦ \qquad \therfore دَ (٠^{+}) \neq دَ (٠^{-})$$

وعلى ذلك فإن دَ (٠) غير موجودة وتكون النقطة س = صفر نقطة حرجة. نحسب مشتقة الدالة د (س) عندما س < ٠ فنحصل على :

دَ (س) = ٢ (س + ٣) .

ومنها يكون دَ (س) = ٠ عندما س = -٣ وهذه النقطة لاتنتمى للفترة [-٢ ، ٢] التى نبحث فيها . وعلى ذلك فهذه النقطة لا تؤخذ فى الاعتبار ونحسب مشتقة الدالة د (س) عندما س > ٠ فنحصل على دَ (س) = ٢ (س - ٣) ومنها تكون دَ (س) = ٠ عندما س = ٣ . وهذه النقطة لاتنتمى للفترة [-٢ ، ٢] فلا تؤخذ فى الإعتبار . أى أن مجموعة النقط الحرجة لهذه الدالة هى { ٠ } .

نحسب قيمة الدالة عند هذه النقطة بالإضافة إلى نقطتى الأطراف فنحصل على المجموعة :

{ د (٠) ، د (-٢) ، د (٢) } = { ٩ ، ١ ، ١ } = { ٩ ، ١ } .

وعلى ذلك فإن القيمة العظمى المطلقة للدالة هى ٩ وتبلغها عند س = ٠ والقيمة الصغرى المطلقة للدالة هى ١ وتبلغها عند كل من طرفى الفترة [-٢ ، ٢] .

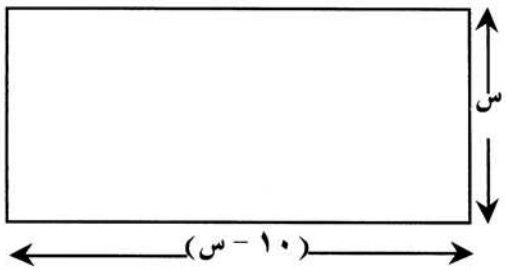
مثال ٧ (تطبيقى) :

إذا أعطيت سلكا طوله ٢٠ سم وطلب منك صنع مستطيل منه ذى أكبر مساحة ممكنة فعين أبعاد المستطيل .

الحل

نفرض أن عرض مستطيل ما مكون من هذا السلك يساوى س فيكون طوله يساوى (١٠ - س) .

والمدى الذى تتغير فيه س هو [٠ ، ١٠]



شكل (٤ - ١٤)

ومساحة هذا المستطيل هى :

د (س) = س (١٠ - س) = ١٠ س - س^{٢}

نحسب دَ (س) ثم نحل المعادلة دَ (س) = ٠

فنحصل على دَ(س) = ١٠ - ٢س = ٠ ،

أى أن دَ (س) = ٠ عندما س = ٥ . أى أن لهذه الدالة نقطة حرجة واحدة هى س = ٥

نحسب المجموعة :

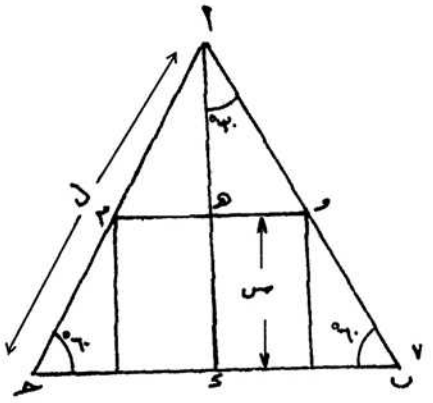
{ د (٥) ، د (٠) ، د (١٠) } = { ٢٥ ، ٠ ، ٠ } = { ٢٥ ، ٠ }

انظر شكل (٤ - ١٤) .

وعلى ذلك فإن أكبر مساحة لهذا المستطيل تكون عندما يكون عرضه س = ٥ ومن ثم فطوله يساوى أيضًا ٥ الشكل مربعًا .

مثـال ٨ (تطبيقى) :

فى مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ل رسم مستطيل بحيث ينطبق بأحد أضلاعه على قاعدة المثلث وتقع رأسى الضلع المقابل على الضلعين الآخرين للمثلث . أوجد المستطيل ذا أكبر مساحة الذى يمكن رسمه داخل المثلث بهذه الشروط .



شكل (٤ - ١٥)

الحـــل

ارتفـاع المثلث أ ب جـ يسـاوى ل جـا ٦٠

نفـــرض أن طول ضلع المســـتطيل المحـقق للشـروط المعطاه يسـاوى س .

إذن طول و هـ (أى نصف طول الضلع الآخر للمستطيل)

= أ هـ ظا ٣٠ = (ل جا ٦٠ - س) ظا ٣٠

انظر شكل (٤ - ١٥)

إذن مساحة المستطيل = س × ٢ (ل جا ٦٠ - س) ظا ٣٠

وهى دالة تعتمد على س سنرمز لها بالرمز د (س) ، أى أن :

د (س) = ٢س (ل جا ٦٠ - س) ظا ٣٠

= ٢ س (ل $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ - س) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ل س - $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ س٢

والفترة التى تتغير فيها س هى [٠ ، ل جا ٦٠] = [٠ ، ل $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$]

حيث أن د (س) قابلة للاشتقاق فى الفترة] ٠ ، ل $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ [فإننا نحسب د (س) ونحل المعادلة دَ (س) = ل - $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ س = ٠ س = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل

ومن ثم نحسب المجموعة { د (٠) ، د (ل $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) ، د ($\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل) }

= { ٠ ، ٠ ، ل $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل - $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ($\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل)٢ } = { ٠ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٨}$ ل٢ }

وعلى ذلك فإن أكبر قيمة لمساحة المستطيل تساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٨}$ ل٢ وتبلغها عندما تكون أبعاد المستطيل هى $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ل ، $\frac{١}{٢}$ ل .

مثـال (٩) :

متوازى مستطيلات قاعدته مربع طول ضلعه س سم ومجموع أطوال أحرفه جميعها ٣٠٠ سم أثبت أن حجمه يساوى س^{٢} (٧٥ - ٢س) ثم أوجد أبعاد متوازى المستطيلات عندما يكون حجمه أكبر ما يمكن .

الحـــل

ليكن ح حجم متوازى المستطيلات

∴ ح = س^{٢} ع ..... (١)

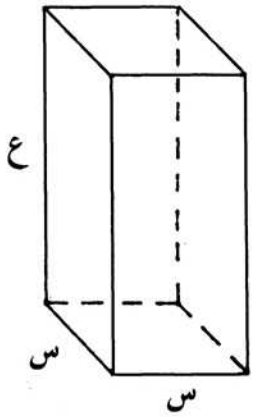
حيث ع ارتفاع متوازى المستطيلات. (أنظر شكل ٤ - ١٦)

وللتعبير عن ع بدلالة س نستخدم المعادلة

٣٠٠ = ٤ع + ٨س أى ٧٥ = ع + ٢س

ع = ٧٥ - ٢س

بالتعويض فى (١) حيث ٠ < س < $\frac{٧٥}{٢}$



شكل (٤ - ١٦)

ينتج أن :

ح = س^{٢} (٧٥ - ٢س)

= ٧٥ س^{٢} - ٢س^{٣}

$\frac{د ح}{د س}$ = ١٥٠ س - ٦س^{٢}

عند القيم العظمى أو الصغرى $\frac{د ح}{د س}$ = ٠

أى ١٥٠ س - ٦س^{٢} = ٠

أى ٦س (٢٥ - س) = ٠

مجموعة حل المعادلة = { ٠ ، ٢٥ }

$\frac{د^{٢} ح}{د س^{٢}}$ = ١٥٠ - ١٢س

$[\frac{د^{٢} ح}{د س^{٢}}]_{س=٢٥} = ١٥٠ - ٣٠٠ < ٠$ ، بذلك يكون الحجم أكبر ما يمكن عند س = ٢٥

$[ع]_{س=٢٥} = ٧٥ - ٢ \times ٢٥ = ٢٥$سم

∴ أبعاد متوازى المستطيلات ذو أكبر حجم هى ٢٥ ، ٢٥ ، ٢٥ سم

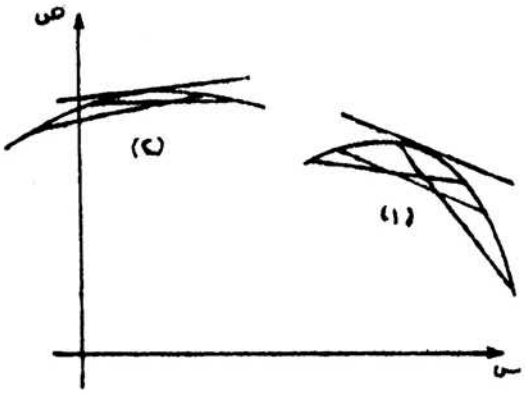
(بند ٤ - ٥) :

التحدب إلى أعلى والتحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب .

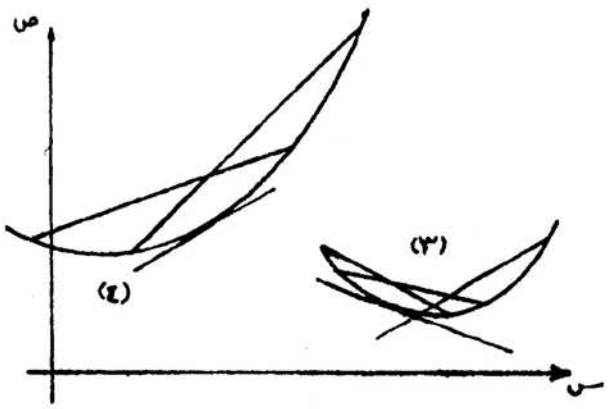
تسمى قطعة المستقيم الواصلة بين أى نقطتين على منحنى وتراً لهذا المنحنى .

تعريف (١) :

يقال لجزء متصل من منحنى أنه محدب إلى أعلى إذا كان المنحنى يقع أعلى جميع أوتاره لواصلة بين أى نقطتين من نقط هذا الجزء ويقال أنه محدب إلى أسفل إذا كان المنحنى يقع سفل جميع الأوتار الواصلة بين أى نقطتين من نقط هذا الجزء وذلك كما هو موضح بشكل (٤ - ١٧) وشكل (٤ - ١٨) .



شكل (٤ - ١٧)



شكل (٤ - ١٨)

★ ملاحظة :

• نلاحظ أن جزء المنحنى المحدب إلى أعلى كما أنه يقع أعلى أوتاره حسب التعريف فإنه يقع أسفل المماسات للمنحنى عند نقط هذا الجزء وبالمثل فإن المنحنى المحدب إلى أسفل يقع أعلى المماسات للمنحنى عند نقط هذا الجزء .

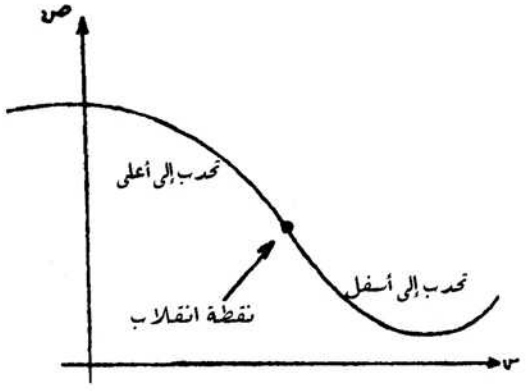
• فى حالة الدوال القابلة للاشتقاق مرتين فإن علم التفاضل يزودنا بإختبار بسيط لاكتشاف مناطق التحدب إلى أعلى وإلى أسفل وسوف نورد النظرية اللازمة لذلك بدون برهان .

نظريـة :

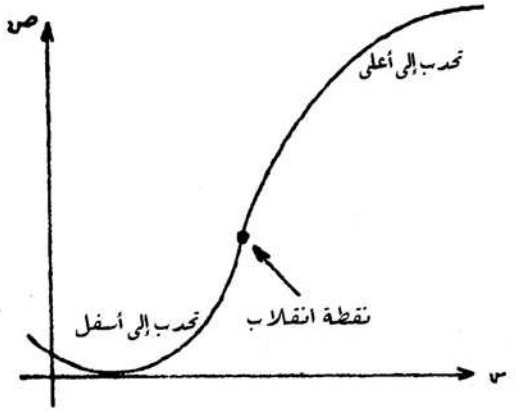
إذا كانت المشتقة الثانية د٢ (س) < ٠ فى منطقة ما فإن المنحنى يكون محدبا لأعلى فى هذه المنطقة. وإذا كانت د٢ (س) > ٠ فى منطقة ما فإن المنحنى يكون محدبا إلى أسفل فى هذه المنطقة .

★ تعريف (٢) :

النقـط التـى تفصل بين مناطق التحدب إلى أعلى وإلى أسفل تسمى نقط الإنقلاب انظر شكل (٤ - ١٩) وشكل (٤ - ٢٠) .



شكل (٤ - ١٩)



شكل (٤ - ٢٠)

من النظرية السابقة ينتج أنه إذا كانت د (س) متصلة وكان الاحداثى السينى لنقطة الانقلاب هو س$_{1}$ فان المشتقة الثانية للدالة (فى حالة وجودها) تنعدم أى أن دً (س) = ٠

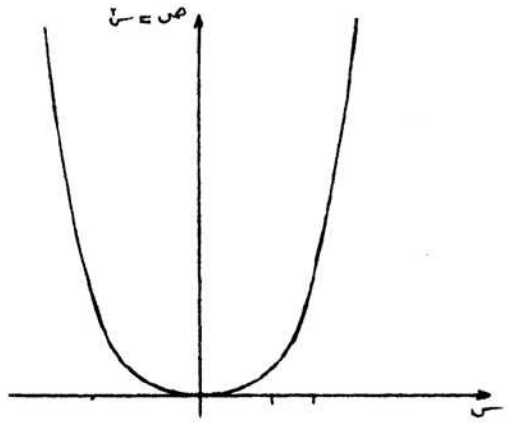
أى أنه عند نقطة الانقلاب لمنحنى الدالة ص = د (س) يلزم أن تكون المشتقة الثانية فى حالة وجودها مساوية للصفر ولكن هذا الشرط ليس كافيًا بمعنى أنه إذا كانت دً (س$_{1}$) = صفر فليس من الضرورى أن تكون س$_{1}$ إحداثيا سينيًا لنقطة إنقلاب فمثلاً الدالة د (س) = س^{٤}

دَ (س) = ٤س^{٣}

دَ (س) = ١٢ س^{٢} > ٠ لكل س ∈ ح - { ٠ }

أى أن منحنى هذه الدالة محدب إلى أسفل دائمًا كما موضح بشكل (٤ - ٢١)

وهذا يعنى أنه توجد على المنحنى أى نقط إنقلاب ومع هذا فإن دً (٠) = ٠



شكل (٤ - ٢١)

مثال:

إذا كان د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٣س^{٢} + ٨س فأوجد مناطق التحدب إلى أعلى وإلى أسفل ونقط الانقلاب .

الحل

∵ د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٣س^{٢} + ٨ س ∴ دَ (س) = س^{٢} - ٦س + ٨

دً (س) = ٢ س - ٦

وعلى ذلك فإن منحنى الدالة يكون محدبًا إلى أعلى إذا كان ٢س - ٦ > ٠ (أى عندما س > ٣) ويكون محدبًا إلى أسفل إذا كان ٢س - ٦ < صفر .

(أى عندما س٣<) وعلى ذلك فإن س = ٣ هى الإحداثى السينى لنقطة فصل بين منطقتى تحدب إلى أعلى وإلى أسفل ، وعلى ذلك فهى نقطة انقلاب ولحساب الاحداثى الصادى لنقطة الانقلاب .

د (٣) = $\frac{١}{٣}$ × ٢٧ - ٣ × ٩ + ٨ × ٣ = ٦

وعلى ذلك فإن نقطة الانقلاب تكون (٣ ، ٦)

رسم منحنيات الدوال :

سوف نقتصر فى دراستنا لرسم المنحنيات على دوال كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة أو أقل أى على الصورة د (س) = أ $س^{٣}$ + ب $س^{٢}$ + جـ س + ء

ولرسم المنحنى نتبع الخطوات التالية :

١ - نحسب دَ (س) ، دً (س) .

٢ - من دَ (س) نعين مناطق التزايد والتناقص بحل المتباينتين دَ (س) > ٠ ، دَ (س) < ٠ على الترتيب . ونعين نقط القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) ، قيم الدالة عندها .

٣ - من دً (س) نعين مناطق التحدب إلى أعلى ومناطق التحدب إلى أسفل وذلك بحل المتباينتين دً (س) < ٠ ، دً (س) > ٠ على الترتيب ونعين الإحداثى السينى لنقط الانقلاب وقيم الدالة عندها .

٤ - نعين إن أمكن بعض النقط الاضافية على المنحنى من معادلة ص = د (س) مثل تقاطعه مع محورى السينات والصادات وبعض النقط الأخرى وذلك إذا كنا فى حاجة لزيادة التعرف على المنحنى .

مثال (١) :

إرسم منحنى الدالة د (س) = $س^{٣}$ - ٣س + ٢ .

الحل

د (س) = $س^{٣}$ - ٣س + ٢

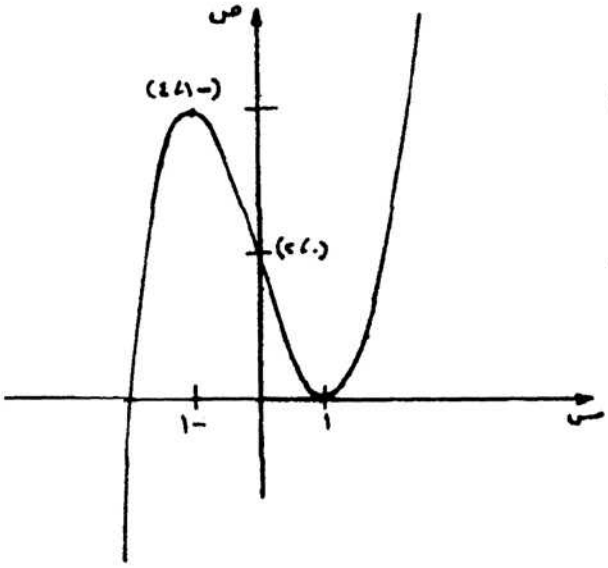
∴ دَ (س) = ٣$س^{٢}$ - ٣ = ٣ (س - ١) (س + ١)

دً (س) = ٦س

من إشارة د (س) (أنظر إلى الشكل المرفق) نجد أن الدالة د تتزايد فى المنطقة عندما س < -١ وتتناقص فى المنطقة عندما -١< س < ١ تتزايد مرة أخرى فى المنطقة س > + ١ وللدالة عند النقطة س = -١ قيمة عظمى محلية وعند النقطة س = ١ قيمة صغرى محلية .

وحيث أن د' (س) = ٦س تكون موجبة عندما س > ٠ وسالبة عندما س < ٠ فإن منحنى الدالة يكون محدبًا إلى أسفل .

عندما س > ٠ ومحدبًا إلى أعلى عندما س < ٠ وتوجد عند س = ٠ نقطة انقلاب . ونحسب قيمة د (س) عند مجموعة النقاط { -١ ، ٠ ، ١ } حسب الجدول التالى



شكل (٤ - ٢٢)

س	-١	٠	١
د (س) = س^{٣} - ٣س + ٢	٤	٢	٠

من المعلومات السابقة يمكن أن نستنتج الشكل العام للمنحنى كما هو موضح فى شكل (٤ - ٢٢) .

مثـال (٢) :

ارسم شكلا لمنحنى الدالة فى الفترة [١ ، ٣] إذا علمت المعلومات التالية : -

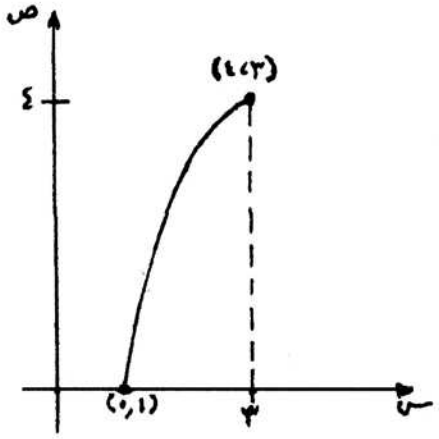
١ - د (١) = ٠ ، د (٣) = ٤

٢ - دَ (س) > ٠ لكل س ∈ [١ ، ٣]

٣ - دَ (س) < ٠ لكل س ∈ [١ ، ٣]

الحـــل

نرسم محـورى الإحـداثيـات العـموديين ومن (١) نجـد أن النقطتين (١ ، ٠) ، (٣ ، ٤) تقعان على المنحنى ، أى أن المنحنى يصل بينهما . ومن (٢) نجـد أن المنحنى يتـزايد مع تزايد س ومن (٣) نســتنتج أن المنحنـــى يكـــون مـحدبًا إلى أعلى . وعلى ذلك فـالرسم كـمـا هو مبين بالشكل (٤ - ٢٣) .



شكل (٤ -٢٣)

مثـال (٣) :

عين كلاً من أ ، ب بحيث تكون النقطة (١ ، ٣) نقطة انقلاب للمنحنى

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} . ثم ارسم شكلاً عامًا للمنحنى .

الحـــل

النقطة (١ ، ٣) تقع على المنحنى فهى تحقق معادلته ، أى أن ٣ = أ + ب ..... (١)

وبما أن عند س = ١ توجد للمنحنى نقطة انقلاب. إذن دً (١) = ٠ حيث أن

دً (س) = ٦ أ س + ٢ب ،

إذن ٦ أ + ٢ب = ٠ أو ٣أ + ب = ٠ ..... (٢)

بحل (١) ، (٢) نجد أن أ = $-\frac{٣}{٢}$ ، ب = $\frac{٩}{٢}$

ومن ثم تكون معادلة المنحنى هى :

$$ص = -\frac{٣}{٢}س^{٣} + \frac{٩}{٢}س^{٢}$$

ولرسم الشكل العام للمنحنى نتبع التالى .

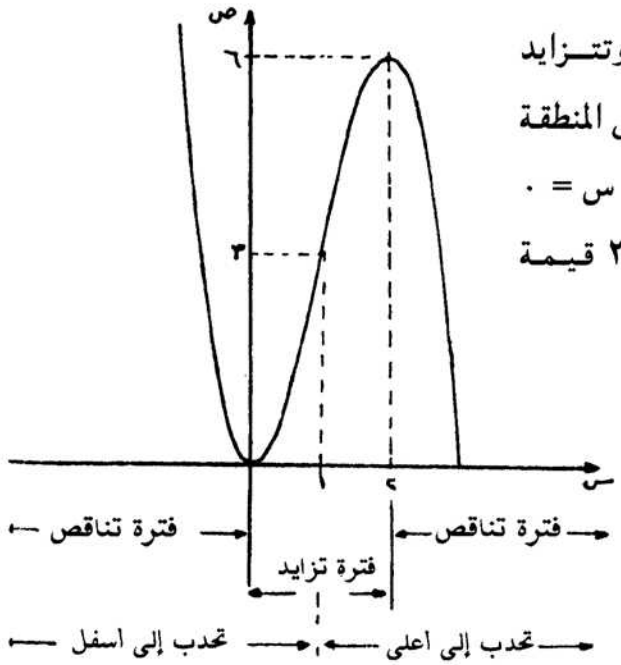
$$ص' = -\frac{٩}{٢}س^{٢} + ٩س$$

$$= ٩س\left(-\frac{١}{٢}س + ١\right) ،$$

$$ص'' = -٩س + ٩ = ٩(-س + ١) .$$

من إشارة ص' (أنظر الشكل المقابل)

نجد أن ص تتناقص فى المنطقة س < ٠ وتتزايد فى المنطقة ٠ < س < ٢ ثم تتناقص ثانية فى المنطقة س > ٢ ومن ثم توجد للدالة عند النقطة س = ٠ قيمة صغرى محلية وعند النقطة س = ٢ قيمة عظمى محلية .



شكل (٤ - ٢٤)

وحيث أن :

ص'' = ٩(-س + ١) تكون أكبر من الصفر عندما س < ١ وأصغر من الصفر عند س > ١ فإن المنحنى يكون محدبًا إلى أسفل عندما س < ١ ومحدبًا إلى أعلى عندما س > ١ .

وتكون النقطة التى عندها س = ١

نقطة إنقلاب بحساب قيم ص عند نقط المجموعة { ٠ ، ١ ، ٢ } حسب الجدول التالى :

س	٠	١	٢
$ص = -\frac{٣}{٢}س^{٣} + \frac{٩}{٢}س^{٢}$	٠	٣	٦

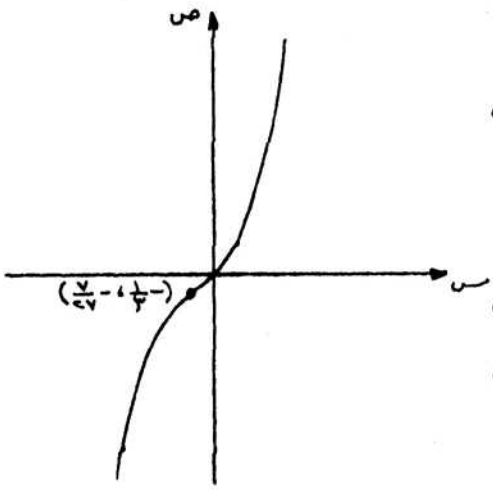
ويكون المنحنى كما بشكل (٤ - ٢٤) .

مثـال (٤) :

أثبت أن المنحنى الذى معادلته ص = س^{٣} + س^{٢}+س ليس له نقط قيم عظمى أو صغرى محلية . ثم أرسم المنحنى .

الحـل

حيث أن ص = س^{٣} + س^{٢} + س ، فإن صَ = ٣س^{٢}+ ٢س + ١ . لكى توجد نقطة قيمة عظمى أو صغرى محلية فيجب أن تكون صَ = ٠ عند هذه النقطة . أى أن ٣س^{٢} + ٢س + ١ = ٠ . ولكن هذه المعادلة ليس لها حلول حقيقية (فى ح) لأن مميزها ب^{٢} - ٤ أجـ = ٢^{٢} - ٤ × ٣ × ١ = -٨ عدد سالب . وعلى ذلك فإن المشتقة ٣س^{٢} + ٢س + ١ تكون ثابتة الإشارة وتنطبق اشارتها مع إشارة معامل س^{٢} وهو هنا + ٣ . أى أن ص > ٠ دائما . ومن ذلك يتضح أن الدالة ص = س^{٣} + س^{٢} + س تتزايد دائمًا .



شكل (٤ - ٢٥)

لرسم المنحنى نوجد أيضًا ص فنحصل على

ص = ٦س + ٣ = ٢ (٣س + ١) .

وهذه تكون موجبة عندما ٣س + ١ > ٠ (أى عندما س > - $\frac{٣}{٢}$) وفى هذه المنطقة يكون المنحنى محدبا إلى أسفل ، والمشتقة الثانية تكون سالبة عندما ٣س + ١ < ٠ (أى عندما س < -$\frac{١}{٣}$) وفى هذه المنطقة يكون المنحنى محدبًا إلى أعلى ، وعلى ذلك فان النقطة س = - $\frac{١}{٣}$ تكون نقطة إنقلاب

نحسب قيمة ص عند س = -$\frac{١}{٣}$ وكذلك (لاستكمال المعلومات عن المنحنى) عند سَ = ٠ فنحصل على الجدول التالى :

ص	$-\frac{١}{٣}$
ص = س^{٣} + س^{٢}+ س	$-\frac{٧}{٢٧}$

ثم نرسم المنحنى بناء على المعلومات السابقة .

الخلاصة

١- أ) إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق فى الفترة]أ ، ب[وكانت متزايدة (متناقصة) فى هذه الفترة فإن د َ (س) ≥ ٠ (د َ (س) ≤ ٠) لكل س ∈]أ ، ب[.

ب) الدالة د القابلة للاشتقاق تكون متزايدة (متناقصة) فى الفترة]أ ، ب[كان د َ (س) > ٠ د َ (س) < ٠ فى الفترة]أ ، ب[.

٢- إذا كانت الدالة ص = د (س) متصلة ومتزايدة قبل $س_1$ مباشرة وكانت متناقصة بعد $س_1$ مباشرة فإنه يكون للدالة قيمة عظمى محلية عند $س_1$.

٣ - إذا كانت الدالة ص = د (س) متصلة ومتناقصة قبل $س_2$ مباشرة وكانت متزايدة بعد $س_2$ مباشرة فإنه يكون للدالة قيمة صغرى محلية عند $س_2$.

٤ - إذا كانت الدالة ص = د (س) قابلة للاشتقاق وكان لها قيمة عظمى أو صغرى محلية عند $س_1$ فإن د ($س_1$) = ٠

٥ - إذا كان د َ ($س_1$) = ٠ ، د ً ($س_1$) < ٠ فإن $س_1$ تكون نقطة للدالة عندها قيمة عظمى محلية .

٦ - إذا كان د َ ($س_1$) = ٠ ، د ً ($س_1$) > ٠ فإن $س_1$ تكون نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية .

٧ - لبحث القيم العظمى والصغرى المطلقة ع ، ص فى الفترة [أ ، ب] للدالة ص = د (س) نوجد مجموعة النقط الحرجة { $ر_1$ ، $ر_2$ ، .... } ثم نوجد مجموعة قيم الدالة { د (أ) ، د (ب) ، د ($ر_1$) ، د ($ر_2$) ، .... }

ع = أكبر قيمة فى هذه المجموعة ، ص = أصغر قيمة فى هذه المجموعة .

٨ - يكون المنحنى محدبًا لأعلى فى منطقة ما إذا كان د ً (س) < ٠ فى هذه المنطقة . ومحدبًا إلى أسفل فى منطقة ما إذا كان د ً (س) > ٠ فى هذه المنطقة ونقطة الفصل $س_1$ بين منطقتى تحدب إلى أعلى وإلى أسفل تسمى نقطة إنقلاب ويكون عندها د ً ($س_1$) = ٠

تمارين (٤ - ٢)

١ - عين القيم العظمى المحلية وكذلك نقط الانقلاب للدوال التالية : إن وجدت

(I) $ص = س^{٢} + ٤س + ٦$

(II) $ص = ٢ + س - س^{٢}$

(III) $ص = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س + ٢$

(IV) $د (س) = ٢س^{٣} + ٣ س^{٢} - ١٢س + ٥$

(V) $ص = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ١$

(VI) $د (س) = س (س - ١)^{٢}$

(VII) $د (س) = \frac{س^{٢}}{س-١}$

(VIII) $٣ ص = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ١٥$

(IX) $د (س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ١٥س$

(X) $د (س) = س + \frac{٤}{س-١}$

(XI) $د (س) = س | س - ٤|$

٢ - عين القيم الصغيرى المطلقة والعظمى المطلقة للدوال التالية فى الفترة المحددة لكل منها :

(I) $ص = س^{٣}$ فى $[-١ ، ٣]$

(II) $ص = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ١$ فى $[-١ ، ٥]$

(III) $ص = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} + ١$ فى الفترة $[-١٠ ، ١٢]$

(IV) $ص = \frac{س}{س-١}$ فى $[٢ ، ٤]$

(V) ص = س + $\frac{١}{س + ٢}$ فى [٠ ، ٣]

(VI) د (س) = { (س − ٢)^{٢} عندما س ≥ ٣ ؛ ٤ − س عندما س < ٣ } فى [٢ ، ٥]

(VII) د (س) = { س^{٣} + ٣س^{٢} عندما س ≥ ٠ ؛ س^{٢} − ٢س عندما س < ٠ } فى [−٣ ، ٣]

(VIII) د (س) = { س^{٢} + س − ٢ عندما س ≥ ٢ ؛ ٥ س − ٦ عندما س < ٢ } فى [−١ ، ٣]

٣ − اثبت أنه إذا كان س عددا موجبا فإن س + $\frac{١}{س}$ ≥ ٢

٤ − عين كلا من ل ، م بحيث تكون الدالة د (س) = س^{٢} + ل س + م لها قيمة صغرى تساوى ٣ عندما س = ١

٥ − أوجد أ، ب بحيث يكون للمنحنى الذى معادلته س^{٢} ص + أ س + ب ص = ٠ نقطة إنقلاب عند النقطة (٢ ، $\frac{٥}{٢}$)

٦ − ارسم شكلاً عامًا لمنحنيات الدوال التالية : −

(I) د (س) = س^{٣} − ٣س^{٢}

(II) ص = (س − ١)^{٢} (س + ٢)

(III) د (س) = $\frac{(س - ٢)^{٢} (س + ٤)}{٤}$

(IV) ص = س^{٣} + ٣س^{٢} − ٩س − ٣

(V) د (س) = ٣ + ٦س − ٢س^{٣}

(VI) ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢} − ٣س + ١

٧ - وجد أحد مصانع الأجهزة الكهربية أنه يكسب ٣٠ جنيهًا فى كل جهاز إذا كان انتاجه الشهرى ٥٠ جهازاً فإذا زاد الإنتاج عن هذا العدد فإن الربح فى الجهاز يقل ٥٠ قرشًا عن كل جهاز زيادة . أوجد عدد الأجهزة التى ينتجها المصنع فى الشهر ليحقق أكبر ربح ممكن .

٨ - صفيحة معدنية رقيقة مربعة الشكل طول ضلعها ١٠سم قطع من أركانها أربعة مربعات متساوية ثم ثنى الجزء الباقى على شكل علبة بدون غطاء . أوجد طول ضلع المربع المقطوع بحيث يكن حجم العلبة أكبر ما يمكن .

٩ - عددان مجموعهما ١٦ . أوجد العددين إذا كان مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن .

١٠ - قطعة من السلك طولها ل صنع منها مستطيل أوجد أبعاد المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

١١ - قطعة من السلك طولها ٢ ل صنع منها مثلث قائم الزاوية . أوجد أبعاد هذا المثلث بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

١٢ - سلك طوله ٣٤سم قسم إلى جزئين ثم ثنى الجزء الأول على شكل مربع والثانى على شكل دائرة . أوجد طول كل جزء بحيث يكون مجموع مساحتى الشكلين أقل ما يمكن .

١٣ - إذا كانت تكاليف استهلاك الوقود لقاطرة تتناسب مع مربع سرعتها وكانت هذه التكاليف ٢٥ جنيهًا فى الساعة عندما تكون السرعة ٢٥ كم / ساعة كما أن هناك تكلفة إضافية تقدر بمائة جنيه فى الساعة بصرف النظر عن سرعتها . أوجد سرعة القاطرة لتكون تكلفة الكم الواحد أقل ما يمكن .

١٤ - إذا كانت المساحة الكلية لاسطوانة دائرية قائمة هى ٢٤ ط سم٢ . أوجد أكبر حجم الأسطوانة .

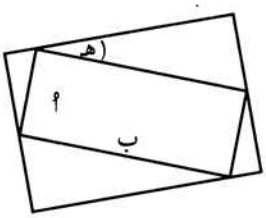
١٥ - علبة على شكل متوازى مستطيلات سعتها ٩٠٠٠ سم٣ وارتفاعها ضعف عرضها أوجد أبعاد متوازى المستطيلات عندما تكون مساحة أوجهه الستة أقل ما يمكن .

١٦ - إذا كان مجموع مساحتى سطح كرة واسطوانة متفقة معها فى نصف القطر يساوى ٢٥٠ ط سم٢ ، فأوجد نصف القطر عندما يكون مجموع حجميهما أكبر ما يمكن .

١٧ - أوجد نقطة على المنحنى ص^{٢} = ٤ س + ٥ بحيث تكون المسافة بينها وبين النقطة (٣ ، ٠) أقل ما يمكن .

١٨ - نافذة على هيئة مستطيل يعلوه نصف دائرة ينطبق قطرها على أحد أبعاد المستطيل فإذا كان محيط النافذة ٦ أمتار . أوجد نصف قطر نصف الدائرة الذى يجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن .

١٩ - إذا علم أن قوة احتمال قطعة خشبية مقطعها مستطيل يتناسب طرديًا مع حاصل ضرب أحد بعدى المستطيل فى مربع بعده الآخر - أوجد بعدى المقطع لقطعة خشبية ذات أكبر قوة احتمال يمكن استخلاصها من جذع شجرة على شكل اسطوانة دائرية قائمة قطرها ١٠٠ سم .



٢٠ - فى الشكل المقابل :
أوجد أكبر مساحة للمستطيل الذى يمكن رسمه خارج المستطيل الذى بعداه هما الثابتان أ ، ب .

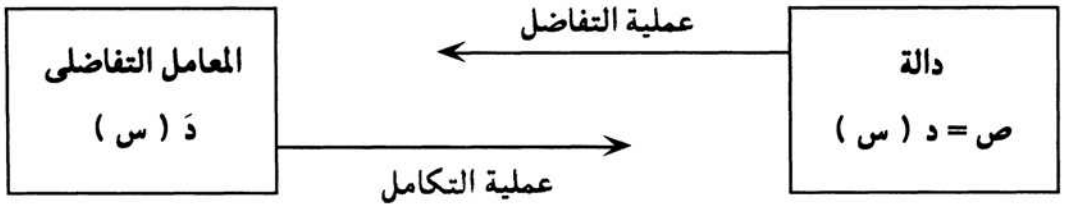
الباب الخامس

التكامل

(بند ٥ - ١) مقدمة :

درسنا فيما سبق كيفية الحصول على الدالة المشتقة دَ من الدالة الأصلية د. ولكن قد يكون المطلوب فى بعض التطبيقات الحصول على الدالة د إذا علمت الدالة المشتقة د (عملية عكسية) وعلى سبيل المثال قد يكون معلوما لدينا السرعة ع = $\frac{\text{ى ف}}{\text{ى ن}}$ ومطلوب ايجاد المسافة ف ، أو قد يكون معلوما لدينا ميل المماس لمنحنى دالة د عند أى نقطة (س ، ص) ومطلوب إيجاب الدالة د . وهذا يستدعى البحث عن دالة اذا فاضلناها حصلنا على المشتقة المعلومة .

وتسمى هذه العملية بايجاد دالة مشتقة عكسية أو دالة أصلية مقابلة وهذا ما يعرف بعلم التكامل .



★ تعريف :

إذا كان لدينا دالة متصلة د وأمكن ايجاد دالة ت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة فى مجال الدالة د بحيث كان تَ(س) = د (س) فإن ت (س) تسمى دالة مشتقة عكسية أو دالة أصلية مقابلة للدالة د .

مثـال :

أوجد دالة أصلية مقابلة للدالة د (س) = ٢س

الحـــل

من دراستنا للمشتقات نلاحظ أن س^{٢} دالة مشتقتها ٢س .

أى أن ت (س) = س^{٢} دالة أصلية مقابلة أو مشتقة عكسية للدالة المفروضة د (س) . غير أننا نلاحظ أن هناك مجموعة غير منتهية من الدوال الأصلية المقابلة للدالة د (س) ذاتها منها :

س^{٢} + ١ ، س^{٢} − ٥ ، س^{٢} − $\frac{٣}{٤}$ ، س^{٢} + $\sqrt{٢}$ ، ... ، س^{٢} + جـ

، حيث جـ ثابت ، وذلك لأن مشتقة كل منها تساوى د (س) = ٢ س

وعليه فإن المشتقة العكسية للدالة د (س) = ٢س ليست وحيدة

وعلى ذلك وبصورة عامة فإن ت (س) = س^{٢} + ث حيث ث ثابت اختيارى لذلك فإن هذه الصورة تسمى المشتقة العكسية أو التكامل غير المحدد .

ويرمز للدالة ت (س) بالرمز $\int$ د (س) ىس وتقرأ تكامل د (س) بالنسبة إلى س ونفهم من ذلك أن

$$ت (س) = \int د (س) \, ىس \Leftrightarrow ت' (س) = د (س)$$

مثـال :

أوجد المشتقة العكسية لكل من الدوال الآتية : ٤س^{٣} ، ٥س^{٤} ، ١٢س^{٥}

الحـــل

ت$_{١}$ (س) = $\int$ (٤س^{٣}) ىس = س^{٤} + ث ،

ت$_{٢}$ (س) = $\int$ (٥س^{٤}) ىس = س^{٥} + ث

ت$_{٣}$ (س) = $\int$ (١٢س^{٥}) ى س = ٢ (٦س^{٥}) س = ٢س^{٦} + ث

★ ونلاحظ أن :

$$\int 12 (س^{5}) \, د س = 12 \times \frac{1}{6} س^{6} + ث = 2س^{6} + ث$$

أى أن $\int (12 س^{5}) \, د س = 12 \int س^{5} \, د س$

وهو نفس الجواب السابق

$$\therefore \int أ د (س) \, د س = أ \int د (س) \, د س \quad \text{حيث أ ثابت}$$

(بند ٦ - ٢) :

مما سبق يتضح لنا أن إيجاد المشتقة العكسية للدوال باستخدام التعريف المباشر للتكامل سهلا بالإضافة إلى أنه يستغرق وقتا طويلاً ولكننا سنقوم الآن بايجاد صيغ قياسية يمكن استخدامها لايجاد المشتقات العكسية للدوال وتركيبات منها

نظرية (١) :

$$\int (س^{ن}) \, د س = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث \text{ ، حيث } ن \neq -1 \text{ ، ث ثابت}$$

والبرهان ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر .

● **خصائص التكامل :**

(١) $\int (أ س^{ن}) \, د س = أ \int (س^{ن}) \, د س = \frac{أ س^{ن+1}}{ن+1} + ث$ ، حيث أ ، ث ثابتان $ن \neq -1$

(٢) $\int [د_{1} (س) \pm د_{2} (س)] \, د س = \int د_{1} (س) \, د س \pm \int د_{2} (س) \, د س$

مثـال (١) :

حل المثال السابق باستخدام النظرية والخصائص .

مثـال (٢) :

(١) $\int (٣س^{٢} + ٥س - ٢) \, د س = \frac{٣ س^{٣}}{٣} + \frac{٥ س^{٢}}{٢} - ٢س + ث$

$= س^{٣} + \frac{٥}{٢} س^{٢} - ٢س + ث$

(٢) $\int (س^{٤} - س^{٢} + ٥ - ٣س^{-٢}) \, د س = \frac{١}{٥} س^{٥} - \frac{١}{٣} س^{٣} + ٥س + ٣س^{-١} + ث$

(٣) $\int \frac{س^{٤} + ٣س^{٣} + ١}{س^{٢}} \, د س = \int (س^{٢} + ٣س + س^{-٢}) \, د س$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{٣}{٢} س^{٢} - س^{-١} + ث$

(٤) $\int (س^{٢} + \frac{١}{س^{٣}} + \sqrt{س}) \, د س = \int (س^{٢} + س^{-٣} + س^{\frac{١}{٢}}) \, د س$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٢} س^{-٢} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٥) $\int (س^{٢} - ٢)^{٣} \, د س = \int (س^{٦} - ٦ س^{٤} + ١٢س^{٢} - ٨) \, د س$

$= \frac{١}{٧} س^{٧} - \frac{٦}{٥} س^{٥} + ٤س^{٣} - ٨س + ث$

(٦) $\int \frac{س^{٢} - ٤}{\sqrt{س} (س - ٢)} \, د س = \int \frac{س + ٢}{س^{\frac{١}{٢}}} \, د س = \int (س^{\frac{١}{٢}} + ٢س^{-\frac{١}{٢}}) \, د س$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٤س^{\frac{١}{٢}} + ث$

نظرية (٢) :

$$\int (أ س + ب)^{ن} \, د س = \frac{١}{أ} \frac{(أ س + ب)^{ن+١}}{ن + ١} + ث$$

حيث ن ≠ −١ ، أ ، ب ثابتان

والبرهان ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر .

مثال :

(١) $\int (٢ س + ١)^{٦} \, د س = \frac{(٢س + ١)^{٧}}{٢ \times ٧} + ث$

(٢) $\int (٥ - ٤س)^{٩} \, د س = \frac{(٥ - ٤س)^{١٠}}{-٤ \times ١٠} + ث$

(٣) $\int \sqrt{(١ + ٦س)} \, د س = \int (١ + ٦س)^{\frac{١}{٢}} \, د س = \frac{(١ + ٦س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times ٦} + ث$

$$= \frac{\sqrt{(١ + ٦س)^{٣}}}{٩} + ث$$

(٤) $\int س^{٧} (١ - \frac{١}{س})^{٧} \, د س = \int [س (١ - \frac{١}{س})]^{٧} \, د س = \int (س - ١)^{٧} \, د س$

$$= \frac{(س - ١)^{٨}}{٨} + ث$$

تمارين (٥ - ١)

احسب التكاملات الآتية

(١) $\int ٥س \, ى س$

(٢) $\int \frac{ى س}{٨}$

(٣) $\int \frac{ب^{٢} س^{٢}}{أ^{٢}} ى س$ حيث أ ، ب ثابتان

(٤) $\int (٣س^{٢} - س + ١) ى س$

(٥) $\int (٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٨س - ٥) ى س$

(٦) $\int (٢س^{٧} - ٦س^{٣} + ٨س + ١) ى س$

(٧) $\int (س - ٢) (س + ١) (س - ١) ى س$

(٨) $\int \frac{س^{٢} + م^{٢} س}{س} ى س$

(٩) $\int (س - أ) (س - ب) ى س$ حيث أ ، ب ثابتان

(١٠) $\int \sqrt{س} (١ + \sqrt{س}) ى س$

(١١) $\int \frac{١ + س}{\sqrt{س}} ى س$

(١٢) $\int (س + \frac{١}{س})^{٢} ى س$

(١٣) $\int (\sqrt{س} - ١)^{٢} ى س$

(١٤) $\int \frac{ى ن}{\sqrt[٣]{ن^{٤}}}$

(١٥) $\int (٧س - ٣)^{٨}$ د س

(١٦) $\int (٢ - س)^{٩}$ د س

(١٧) $\int (\frac{س + ٢}{٣})^{\frac{١}{٤}}$ د س

(١٨) $\int (س٢ + ٢)^{٣}$ د س

(١٩) $\int (\sqrt{٢س + ٧})$ د س

(٢٠) $\int \frac{٥}{(٢س - ١)^{٥}}$ د س

(٢١) $\int \frac{د س}{\sqrt[٣]{(س + ٩)^{٢}}}$

(٢٢) $\int س^{٥} (١ - \frac{٣}{س})^{٥}$ د س

(٢٣) $\int \frac{س٣ - ٢٧}{س - ٣}$ د س

(٢٤) $\int (س \sqrt{\frac{٣}{س^{٢}} - \frac{٣}{س}})$ د س

(٢٥) $\int (٢س + ١١) \sqrt{٢س + ١١}$ د س

(٢٦) $\int \frac{س + ٣}{\sqrt{س + ٤}}$ د س

تكامل بعض الدوال المثلثية :

(١) $\int$ جا س d س = − جتا س + ك

(٢) $\int$ جتا س d س = جا س + ك

(٣) $\int$ قا^{٢}س d س = ظا س + ك حيث ك ثابت اختيارى

والبرهان ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر

(٤) $\int$ جا (أ س + ب) d س = $-\frac{١}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث

(٥) $\int$ جتا (أ س + ب) d س = $\frac{١}{أ}$ جا (أ س + ب) + ث

(٦) $\int$ قا^{٢} (أ س + ب) d س = $\frac{١}{أ}$ ظا (أ س + ب) + ث حيث ث ثابت اختيارى

والبرهان ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر

مثـال (١) :

(١) $\int$ (جتا س − جا س) d س = جا س + جتا س + ث

(٢) $\int$ (قا^{٢} س + جتا س) d س = ظا س + جا س + ث

(٣) $\int$ جتا (٢س + ٣) d س = $\frac{١}{٢}$ جا (٢س + ٣) + ث

(٤) $\int$ قا٢ ($\frac{س}{٢}$ + ١) d س = ٢ ظا ($\frac{س}{٢}$ + ١) + ث

مثـال (٢) : أوجد قيمة $\int$ (جا س + ١)^{٢} d س

الحـــل

∵ (جا س + ١)^{٢} = ١ + ٢ جا س + جا^{٢}س

∵ جتا ٢س = ١ − ٢ جا^{٢} س

∴ ٢ جا^{٢}س = ١ − جتا ٢س

∴ جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س

∴ $\int$ (١ + جا س)^{٢} d س = $\int$ ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + ٢ جا س + ١) d س

= $\int$ ($\frac{٣}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س + ٢ جا س) d س

= $\frac{٣}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا ٢س − ٢ جتا س + ث

فيما يلى جدول لمشتقات بعض الدوال ومشتقاتها العكسية :

د (س)	دَ (س)	∫ د(س) ى س
أ دالة ثابة	صفر	أ س + ث
أ س^{ن}	ن أ س$^{ن-١}$	$\frac{أ}{ن+١}$ س$^{ن+١}$ + ث (ن ≠ −١)
(أ س + ب)^{ن}	ن أ (أ س + ب)$^{ن-١}$	$\frac{١}{أ}$ $\frac{(أس+ب)^{ن+١}}{ن+١}$ + ث (ن ≠ −١)
جا س	جتا س	− جتا س + ث
جتا س	− جا س	جا س + ث
ظا س	قا^{٢} س	∫ قا^{٢} س ى س = ظا س + ث
جا (أ + ب)	أجتا (أ س + ب)	$\frac{-١}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث
جتا (أ س + ب)	− أجا (أ س + ب)	$\frac{١}{أ}$ جا (أ س + ب) + ث
ظا (أ س + ب)	أ قا^{٢} (أ س + ب)	∫ قا^{٢} (أس+ب) ىس = $\frac{١}{أ}$ ظا (أس+ب) + ث

تمارين (٥-٢)

أوجـــد :

(١) ∫ (جا س + جتا س) ى س

(٢) ∫ جا ٢س ى س

(٣) ∫ جتا ٤س ى س

(٤) ∫ جا $\frac{س}{٢}$ ى س

(٥) ∫ (قا^{٢} س − ٢ جتا س) ى س

(٦) ∫ قا^{٢} ٣س ى س

(٧) ∫ (جتا ٢س − جا س) ى س

(٨) ∫ (قا^{٢} $\frac{س}{٢}$ − جا($\frac{ط}{٤}$ − س))ى س

(٩) ∫ (٢ جا س + $\frac{١}{٢}$ جا ٢س) ى س

(١٠) ∫ جتا^{٢} $\frac{س}{٢}$ ى س

(١١) ∫ (١ + جتا س)^{٢} ى س

(١٢) ∫ (جا س + جتا س)^{٢} ى س

(١٣) ∫ (جتا^{٢}س + قا^{٢}س) ى س

(بند ٥ - ٣) : بعض تطبيقات التكامل :

درسنا فيما سبق أن دَ (س) هو ميل المماس لمنحنى الدالة د (س) عند أى نقطة (س ، ص) على هذا المنحنى ونستطيع الآن باستخدام التكامل الحصول على معادلة منحنى الدالة د (س) إذا علم ميل المماس لهذا المنحنى عند أى نقطة واقعة عليه . أى أن :

معادلة منحنى الدالة د (س) = ∫ دَ(س) ى س

ونلاحظ أن التكامل لا يعطى دالة وحيدة إذ أنه يحتوى على ثابت أختيارى يمكن أن يأخذ أى قيمة ثابته . وعلى ذلك فإنه توجد عائلة من الدوال بحيث أن ميل المماس لها عند النقطة س يكون متساويا ويساوى دَ (س) .

مثـــال (١) :

أوجـد معادلة عـائلة المنحنيات الـتى ميل مماسها عند النقطة التى احداثيها السينى س يساوى ٢ س .

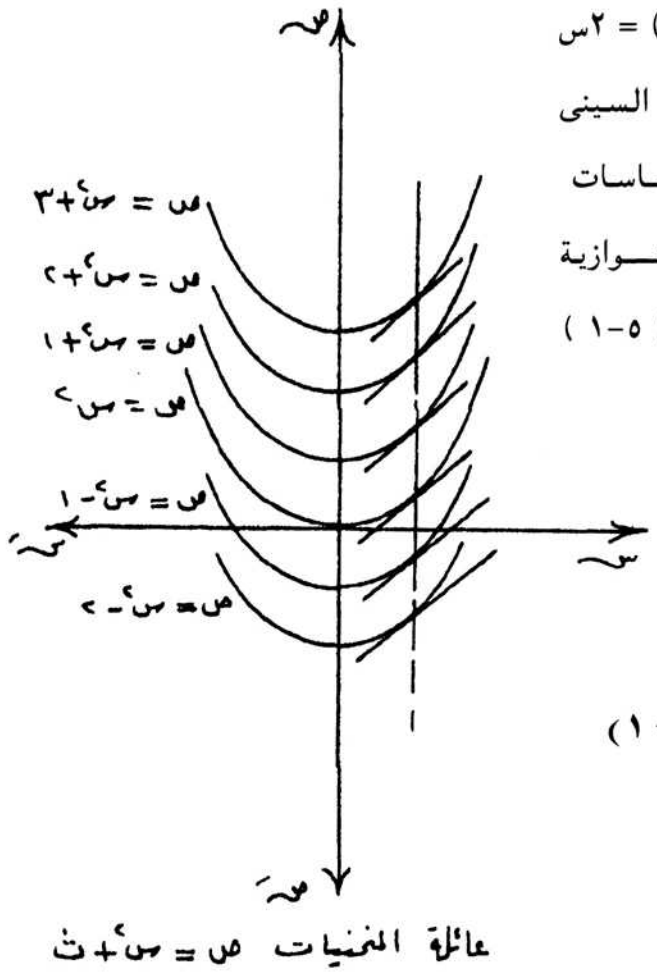
الحـــل

نفرض أن د (س) = ٢س وأن المعادلة المطلوبة هى ص = ت (س) ، حيث

تَ (س) = ٢س ومن ثم فإن :

ت (س) = ∫ (٢س) ى س = س^{٢} + ث

والمعـــادلة ص = س٢ + ث تمثل عـــائلة من القطوع المكافئة تحقق المعادلة دَ(س) = ٢س أى أنه عند جميع النقط التى إحداثيها السينى متساوى ويساوى س مثلا تكون المماسات لكل منحنى من هذه العائلة متوازية أى لها نفس الميل . كما فى شكل (٥-١)



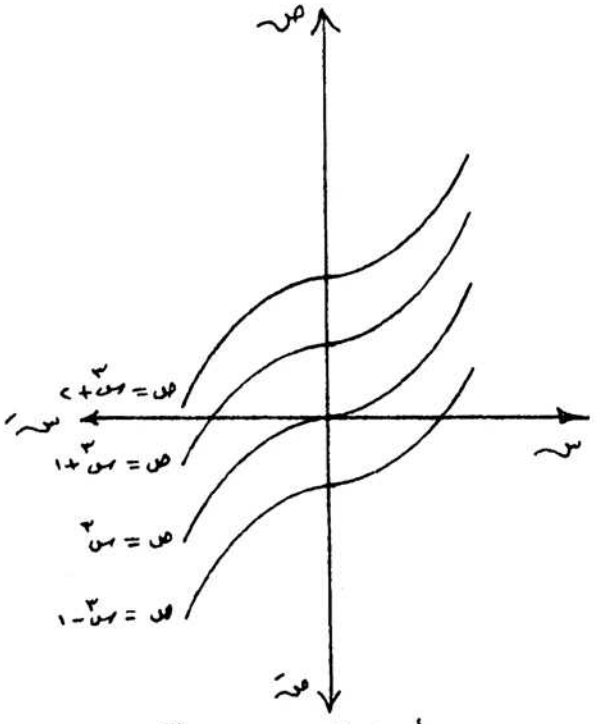
شكل (٥ - ١)

ملاحظة :

إذا إردنا أن نحدد منحنيًا بعينه من عائلة المنحنيات الناتجة من التكامل غير المحدد . فإننا لابد وأن نضيف شرطا آخر يميز هذا المنحنى من العائلة كأن نشترط مرور المنحنى بنقطة معينة .

مثـــال (٢) :

أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة (١ ، ٢) والذى ميل مماسه عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يساوى ٣س^{٢}



شكل (٥ - ٢)

الحـــل

نفرض أن د (س) = ٣س^{٢} وأن المعادلة المطلوبة هى :

ص = ت (س) حيث تَ (س) = ٣س^{٢}

∴ ت (س) = $\int$ (٣س^{٢}) ى س = س^{٣} + ث

أى أن معادلة عائلة المنحنيات التى تحقق الشرط الثانى هى :

ص = س^{٣} + ث

ولتعيين المنحنى الذى يحقق الشرط الأول وهو مرور المنحنى بالنقطة (١ ، ٢) نستخدم هذا الشرط لتعيين الثابت ث فنجد أن :

٢ = ١ + ث ← ث = ١

وعلى ذلك فإن معادلة المنحنى المطلوب هى : ص = س^{٣} + ١

مثـــال (٣) :

أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا علم أن صً = ٢ جتا ٢س وأن معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٠ ، ١) هى ص = س + ١

الحـــل

من معلوماتنا فى التكامل :

$\int$ صً ء س = صَ (لأن مشتقة الطرف الأيسر بالنسبة إلى س هى صً)

∴ صَ = $\int$ ٢ جتا ٢ س ء س

= جا ٢س + ث حيث ث ثابت

∵ ميل المماس (صَ)$_{س=٠}$ = ١

∴ صَ = جا ٢س + ١ ، ∴ ص = $\int$ (جا ٢س + ١) ء س

∴ ص = $-\frac{١}{٢}$ جتا ٢س + س + أ حيث أ ثابت

∵ النقطة (٠ ، ١) تحقق معادلة المنحنى

∴ ١ = $-\frac{١}{٢}$ + أ ∴ أ = $\frac{٣}{٢}$

وتكون معادلة المنحنى المطلوب هى :

ص = س $-\frac{١}{٢}$ جتا ٢س + $\frac{٣}{٢}$

مثـــال (٤) :

أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان دً (س) = ٦س وكان المماس لهذا المنحنى عند النقطة (١ ، ٤) هو المستقيم ص = -٢س + ٦

الحـــل

حيث أن دً (س) = ٦ س ، فإن دَ (س) = ٣س^{٢} + ث$_{١}$ ، دَ (س) تعطى ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه إحداثيها السينى يساوى س ، وبما أن المستقيم ص = -٢ س + ٦ يمس المنحنى عند س = ١ ، فإن دَ (١) تساوى ميل المستقيم ، أى أن دَ (١) = -٢ . من هذه المتساوية نحسب ث$_{١}$ فيكون -٢ = ٣ × ١^{٢} + ث$_{١}$ ← ث$_{١}$ = -٥

أى أن دَ (س) = ٣س^{٢} - ٥ . وبإجراء التكامل مرة ثانية نحصل على :

د (س) = $\int$ (٣س^{٢} - ٥) ء س = س^{٣} - ٥س + ث$_{٢}$

وتكون معادلة المنحنى : ص = س^{٣} - ٥س + ث$_{٢}$

وبما أن المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٤) ، فإنه عندما س = ١ فإن ص = ٤ . وعلى ذلك فإن :

٤ = ١^{٣} - ٥ × ١ + ث$_{٢}$ ← ث$_{٢}$ = ٨

وتكون معادلة المنحنى على الصورة : ص = س^{٣} - ٥س + ٨

مثـال (٥) :

أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٢س - ٣}{٥ - ٢ص}$

وكان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

الحـــل

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٢س - ٣}{٥ - ٢ص}$$

ومنها يكون (٥ - ٢ص) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢س - ٣

وبإجراء التكامل بالنسبة إلى س نحصل على :

$\int$ (٥ - ٢ص) $\frac{ء ص}{ء س}$ ء س = $\int$ (٢س - ٣) ء س

∴ ٥ ص - ص^{٢} = س^{٢} - ٣س + ث (ث ثابت)

وحيث أن المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢) فهى تحقق معادلته . وعلى ذلك :

٥ × ٢-٢^{٢} = ١^{٢} - ٣ × ١ + ث ← ث = ٨

وتكون معادلة المنحنى هى :

٥ ص - ص^{٢} = س^{٢} - ٣س + ٨

مثال (٦) :

إذا كان ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) يعطى من المعادلة $\frac{ح ص}{ح س} = ٣س^{٢} - ٦س - ٩$ وكان للمنحنى قيمة عظمى محلية قدرها ١٠ . فأوجد معادلة المنحنى وأوجد القيمة الصغرى المحلية إن وجدت .

الحل

حيث أن :

$$\frac{ح ص}{ح س} = ٣س^{٢} - ٦س - ٩ = ٣ (س + ١) (س - ٣) \quad (١)$$

فإن هذه المشتقة تساوى الصفر عندما س = -١ أو س = ٣

نحسب المشتقة التالية :

$$\frac{ح^{٢} ص}{ح س^{٢}} = ٦س - ٦ = ٦ (س - ١)$$

ونحسب قيمتها عندما س = -١ وعندما س = ٣ فنجد أن :

$$[\frac{ح^{٢} ص}{ح س^{٢}}]_{س=-١} = [٦ (س - ١)]_{س=-١} = -١٢ < ٠ ،$$

$$[\frac{ح^{٢} ص}{ح س^{٢}}]_{س=٣} = [٦ (س - ١)]_{س=٣} = ١٢ > ٠$$

أى أنه عندما س = -١ توجد قيمة عظمى محلية قدرها ١٠ ، عندما س = ٣ توجد قيمة صغرى محلية . أى أن المنحنى يمر بالنقطة (- ١ ، ١٠) . ولحساب معادلة المنحنى نكامل طرفى المعادلة (١) بالنسبة إلى س فنحصل على :

$$ص = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ث$$

ونحسب الثابت بالتعويض عن س = -١ ، ص = ١٠ ، فنجد أن ث = ٥

فتكون معادلة المنحنى هى :

$$ص = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٥$$

وعلى ذلك تكون القيمة الصغرى المحلية :

$$[ص]_{س=٣} = ٢٧ - ٢٧ - ٢٧ + ٥ = -٢٢$$

تمارين (٥ - ٣)

١ - أوجد الدالة التى مشتقتها الأولى تساوى ٣ - ٢ $س^{-٢}$ + ٢$س^{-٣}$. علما بأن الدالة تساوى ٢ عندما س = $\frac{١}{٢}$

٢ - أوجد الدالة التى مشتقتها الأولى تساوى $\frac{٨س^{٣} - ١}{٢س - ١}$
علمًا بأن الدالة تساوى ١٠ عندما س =١

٣ - إذا كانت $\frac{د ص}{د س}$ = (جا س - جتا س)^{٢} وكانت ص = $\frac{١}{٢}$ عندما س = صفر فأوجد ص بدلالة س

٤ - إذا كانت $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢س + ٧}{٣ - ٢ص}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ١ . فأوجد العلاقة بين س ، ص .

أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بنقطة الأصل وميل المماس عند أى نقطة عليه هو ٢ جا^{٢} $\frac{س}{٢}$

٦ - منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{س}{ص}$ أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة (٣ ، -٢) .

٧ - منحنى ميل المماس له عند أى نقطة قا^{٢}س + جتا س أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة ($\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) .

٨ - منحنى ميل العمودى عند أى نقطة عليه إحداثيها السينى س هو $\frac{-١}{٢س - ٦}$ أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة (٤ ، ٥) .

٩ - منحنى ميل العمودى عند أي نقطة عليه (س ، ص) هو $\sqrt{٣ - ٢ س}$ أوجد معادلته إذا كان يمر بالنقطة (١ ، ٣) .

١٠- منحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١) وميله عند أي نقطة عليه يساوى (٢س - $\frac{١}{٢}$ س^{٢}) أوجد معادلة كل من المماس والعمودى للمنحنى عند النقطة التى احداثيها السينى ٣ .

١١ - منحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١٠) وميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى ٣ (س٢ - ٦س + ٥) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية له .

١٢ - إذا كان ميل منحنى عند أي نقطة عليه يتعين بالعلاقة $\frac{د ص}{د س} = س^{٢} + ٢س - ٨$ وللمنحنى قيمة عظمى محلية تساوى $٢٦\frac{٢}{٣}$ فإوجد القيمة الصغرى المحلية له .

١٣ - إذا كان ميل منحنى عند أى نقطة عليه هو ٣ (س - ١) (س + ١) وله قيمة صغرى محلية تساوى - ٢ . فأوجد القيمة العظمى المحلية له .

١٤ - إذا كان معدل التغير تحت تأثير الحرارة فى مساحة صفيحة م من المعدن بالنسبة للزمن يتعين بالعلاقة $\frac{د م}{د ن} = ٠,٠١٥ ن^{٢} + ٠,٠٢ ن$ حيث م المساحة بالمتر المربع ، ن الزمن بالدقيقة . فأوجد مساحة الصفيحة قبل بدء التسخين مباشرة إذا علم أن : م = ٩٠ متراً مربعًا عندما ن = ١٠ دقائق .

١٥ - فى تجربة ما كان معدل التغير فى حجم كمية من الغاز ح (مقدرة بالمتر المكعب) بالنسبة للضغط الواقع عليه ض (مقدرة بالنيوتن / متر مربع) يعطى بالعلاقة $\frac{د ح}{د ض} = \frac{- أ}{ض^{٢}}$ وكان ح = ١٢م^{٣} عندما ض = $\frac{١}{٢}$ نيوتن / م٢ . أوجد العلاقة بين الحجم والضغط .

١٦ - يقوم مجموعة من العمال بحفر حفرة من التراب فإذا كان معدل حجم التراب المرفوع بالمتر المكعب فى الساعة يتعين بالعلاقة $\frac{د ح}{د ن} = ١٠ - \frac{٢}{٣} ن$.أحسب حجم التراب المرفوع فى ٣ ساعات .

١٧ - اشتركت متسابقتان لمدة أربع دقائق فى الكتابة على الآلة الكاتبة فكانت سرعة المتسابقة الأولى تعطى من العلاقة $\frac{د ك}{د ن} = -٦ ن^{٢} + ١٢ن + ٩٠$ كلمة / دقيقة حيث ك عد الكلمات التى تكتبها خلال زمن ن دقيقة وسرعة المتسابقة الثانية تعطى من العلاقة $\frac{د ل}{د ن} = -٦ ن^{٢} + ١٥ن + ٨٥$ كلمة / دقيقة حيث ل عدد الكلمات التى تكتبها خلال زمن ن دقيقة . أى المتسابقتين تكتب كلمات أكثر من الأخرى .

الاختبار الأول

★ أجب عن السؤال الآتى :

(١) أ) إذا كان د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & ، \quad س \leq ١ \\ ٢س & ، \quad س > ١ \end{cases}$ أبحث اتصالات الدالة د

عند س = ١ وكذلك قابلية إشتقاقها عند س = ١

ب) أوجد $\int$ (جتا^{٢} س + جا س) ى س

★ اجب عن ثلاثة اسئلة مما يأتى :

(٢) أ) المنحنى ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س له نقطة انقلاب عند (٣ ، -٩) أوجد :

أولاً : قيمة كل من أ ، ب **ثانيًا :** موقع القيم العظمى والصغرى المحلية له

ب) إذا كان ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه هو $\frac{٣ + س}{ص}$ فأوجد معادلة المنحنى إذا علم أنه يمر بالنقطة (-٣ ، ٥) .

(٣) أ) إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = س - ص أوجد $\frac{ى ص}{ى س}$ عندما س = ١

ب) يرتفع بالون بمعدل ثابت ١٠ متر / ث وعندما كان ارتفاع ٢٢٠ متراً مرت من تحته سيارة تسير بسرعة منتظمة ٥٠ متر / ث أوجد سرعة تغير المسافة بينهما بعد ٢ ثانية .

(٤) أ) أوجد فترات تزايد وتناقص الدالة د (س) = س (س^{٢} - ٣) ثم ارسم شكلاً تخطيطيًا لمنحنى هذه الدالة

ب) برهن على أن المماس للمنحنى ص = س^{٣} + س + ٢ عند أى نقطة عليه يميل بزاوية حادة على محور السينات ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة س = -١

(٥) أ)منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى قا^{٢} س - جاس أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة ($\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) .

ب)تتحرك نقطة على المنحنى ص = س - $\frac{س}{س^{٢}+١}$ فإذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عن دس = $\sqrt{٢}$ يساوى ٩ أوجد عند نفس النقطة معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن.

الاختبار الثانى

★ أجب عن السؤال الآتى :

(١) أ) أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د (س) = $\begin{cases} \frac{\sqrt{س - ١}}{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س}} & \text{عندما س} \neq ١ \\ أ & \text{عندما س} = ١ \end{cases}$

متصلة عند س = ١

ب) أوجد قيمة $\int_{١}^{٣} س \sqrt{\frac{٦}{س^{٢}} + \frac{٥}{س^{٣}}}$ ء س ، $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ جتا ($\frac{س}{٢}$ + ٢) ء س

★ اجب عن ثلاثة اسئلة فقط مما يأتى :

(٢) أ) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = ٢ جا س + جتا س عند النقطة س = ٠

ب) إذا علم أن $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = س^{٢} - ١ عند أى نقطة من نقط المنحنى ص = د (س)

أوجد معادلة المنحنى إذا علم إنه يمس المستقيم س + ١٢ص = جـ عند النقطة (١ ، ١)

(٣) أ) إذا كانت ص^{٢} = س^{٢} (١ - س) فأثبت أن ص $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ + ($\frac{ء ص}{ء س}$)^{٢} + ٣س = ١

ب) ابحث تحدب المنحنى ص = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤ س - ١٠ وكذلك القيم العظمى والصغرى المطلقة فى الفترة [-١ ، ٥] .

(٤) أ) إناء مملوء بسائل يتسرب من ثقب صغير فإذا كان حجم السائل فى الوعاء يتغير بمعدل ٠,٤ ن - ٤٠ سم^{٣} / ث وكان حجم السائل بعد ٣٠ ثانية من بدء التسرب ٩٨٠سم^{٣} .

أوجد سعة الإناء س وبين بعد كم ثانية يصبح الإناء فارغًا .

ب) إذا علم أن د (س) = أ س^{٢} + ب س + ٢ لها نقطة حرجة عند (١ ، ٤) أوجد قيمة كل من أ ، ب وحدد نوع النقطة

(٥) أ) أوجد ميل المماس للمنحنى س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٤ص - ٨ = ٠ عند نقطة تقاطعه مع محور السينات .

ب) وعاء إسطوانى مفتوح من قاعدته العليا سعته ٨٠٠٠ ط سم^{٣} أوجد أبعاده التى تجعل مساحته السطحية أقل ما يمكن .

الاختبار الثالث

(١) أ) ابحث اتصال الدالة د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & ، \ س \leq ١ \\ ٢س & ، \ س > ١ \end{cases}$

عند س = ١ ثم قابليتها للاشتقاق عند نفس النقطة

ب) أوجد $\int \frac{س - ١}{(٢س + ١)^{٣}} \, د س$

(٢) أ) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = س جتا ٢س + جا س عند نقطة الأصل .

ب) نقطة تتحرك على المنحنى س ص = س + ص - ٥ أوجد موقع النقطة فى اللحظة التى يكون فيها معدل تغير احداثيها السينى بالنسبة للزمن يساوى معدل تغير احداثيها الصادى بالنسبة للزمن

(٣) أ) أوجد قيمة $\int جا^{٢} س \, د س$

ب) عين فترات التزايد والتناقص للمنحنى ص = س (س - ٣)^{٢} ثم ارسم الشكل العام للمنحنى موضحًا عليه مواقع القيم العظمى والصغرى المحلية ونقط الانقلاب إن وجدت .

(٤) أ) منحنى ميل المماس له عند أى نقطة يساوى $\frac{\sqrt{٢ص - ٧}}{\sqrt{٤س - ٣}}$ أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة (١ ، ٤) .

ب) إذا كانت المقاومة بثقل الكيلو جرام المؤثرة على قطار تحرك بسرعة ع كم / ساعة تتعين بالعلاقة م = $\frac{١٠}{ع}$ + ١٠ ع أوجد أصغر قيمة للمقاومة

(٥) أ) أوجد قيمة $\int [(قا^{٢} (- \frac{س}{٢} + ٥) + جتا (٢س + ١)] \, د س$.

ب) إذا كان معدل التغير فى مساحة صفيحة (م بالمتر المربع) بالنسبة للزمن (ن بالثانية) يتعين بالعلاقة $\frac{د م}{د ن}$ = ٠,٠٦ ن - ٠,٥ وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير تساوى ٥٠ متراً مربعًا أوجد مساحة الصفيحة بعد ١٠ ثوانى .

الاختبار الرابع

★ **أجب عن السؤال الآتى :**

(١) أ) أوجد $\int س^{١٠} (\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س^{٢}})^{٥}$ د س ، $\int$ (جا س + جتا س)^{٢} د س

ب) عين فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل ومواقع الانقلاب للمنحنى ص= س^{٤} − ٢٤س^{٢} + ١٠

★ **أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى :**

(٢) أ) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = $\frac{٢ \text{ ظا س}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{س}}$ وذلك عند النقطة س = $\frac{ط}{٦}$

ب) منحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٠) ، وميل العمودى عليه عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{١}{\sqrt{٢ س + ٥}}$ أوجد معادلة المنحنى

(٣) أ) نقطة تتحرك على المنحنى س^{٢} + ص^{٢} − ٥س + ٣ص − ٦ = . فإذا كانت سرعة إحداثيها السينى ٧سم / ث عند النقطة (١ ، ٢) أوجد عند نفس النقطة سرعة احداثيها الصادى .

ب) أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة ص = س^{٣} − ١٢ س فى الفترة [−١ ، ٤]

(٤) أ) أسطوانة تتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها فإذا كان طول نصف قطرها نق يزداد بمعدل ٠,٢ سم / ث وارتفاعها ع يزداد بمعدل ٠,١ سم / ث أوجد معدل التغير فى حجم الأسطوانة عندما نق = ٢ سم ، ع = ٥ سم .

ب) أوجد معادلة المنحنى الذى ميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{٣ - ٢س}{١ + ٢ص}$ إذا علم أنه يمر بالنقطة (١ ، ٢) .

(٥) أ) إذا كانت الدالة د (س) = $\begin{cases} س + ١ & \text{عندما } س \geq ١ \\ ٣ - أ س^{٢} & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ فأوجد قيمة أ

ثم ابحث قابليتها للاشتقاق عند س = ١

ب) برهن على أن أكبر مساحة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة معلومة يكون مربعًا وأوجد مساحة هذا المربع بدلالة طول نصف قطر الدائرة .

الاختبار الخامس

★ **أجب عن السؤال الآتى :**

(١) أ) إذا كان د (س) = $\begin{cases} ٢س^{٢} - ١ & ، \quad س \leq ٢ \\ س + ٥ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة د عند س = ٢ وكذلك قابلية اشتقاقها عند س = ٢

ب) أوجد قيمة $\int \frac{س^{٣} + س - ٢}{س - ١}$ ء س ، $\int$ (جا س جتا س) ء س

★ **أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى :**

(٢) أ) أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى $س^{٢} + ٣س ص + ص^{٢} = ٥$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وذلك عند النقطة (١ ، ١) .

ب) منحنى يمر بنقطة الأصل وميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى ١ - جتا ٢ س أوجد معادلة المنحنى

(٣) أ) بدأت نقطة الحركة على المنحنى $س^{٢} - ص^{٢} + ٦س - ٢٥ = ٠$ من الموقع (٢ ، -٣) وكانت السرعة الابتدائية للاحداثى السينى ٦سم/ ث احسب السرعة الابتدائية للاحداثى الصادى

ب) ارسم شكلاً عاما لمنحنى الدالة ص = $س^{٣} - ٥س^{٢} + ٣س - ٥$ موضحًا عليه مواقع القيم العظمى والصغرى المحلية وكذلك وموقع الانقلاب إن وجدت .

(٤) أ) أوجد معادلة العمودى على المنحنى $ص^{٢} = س + ٢$ عند نقط تقاطعه مع المستقيم ص = س

ب) خزان فارغ سعته ٦ متر مكعب يصب فيه الماء بمعدل (ن + ٢) متر مكعب كل دقيقة حيث ن الزمن أوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان .

(٥) أ) منحنى يمر بنقطة الاصل وميل العمودى عليه عند أى نقطة يساوى $\frac{-١}{٣س^{٢} + ٢س}$ أوجد معادلة المنحنى .

ب) عين فترات تحدب المنحنى ص = $س^{٣} + ٣س^{٢}$.

أجوبة تمارين (١ - ١)

(١) ١ (٢) ليس لها وجود (٣) $\frac{١}{٢}$ (٤) ٧-

(٥) أولاً : ٣ ثانيًا : غير معرفة ثالثًا : صفر

(٦) أولاً : إثبات ثانيًا : -٢

(٧) ٣ (٨) ١

(٩) أولاً : ٨ ثانيًا : ١٠ ثالثًا : -١ رابعًا : ليس لها وجود

(١٠) أولاً : $\frac{ط}{٣}$ ثانيًا : ٣ ثالثًا : $\frac{٣}{٢}$

(١١) ١

أجوبة تمارين (١ - ٢)

(١) أ) متصلة ب) غير متصلة جـ) متصلة د) غير متصلة

هـ) متصلة و) متصلة ز) متصلة

(٢) أ) ١٠ ب) $\frac{١}{٨}$ جـ) $\frac{٥}{٣}$ د) $\frac{١}{٢}$

هـ) -٢ و) $\frac{٣}{٢}$

(٣) أ) د (س) = $\begin{cases} \frac{\sqrt{٢س + ٣} - ٣}{س - ٣} & \text{عند س} \neq ٣ \\ \frac{١}{٣} & \text{عند س} = ٣ \end{cases}$

ب) لا يمكن إعادة تعريفها .

جـ) لا يمكن إعادة تعريفها .

د) لا يمكن إعادة تعريفها .

هـ) د (س) = $\begin{cases} \frac{٥ س + ظا س}{جاس} & ، \quad س < ٠ \\ ٦ & ، \quad س = ٠ \\ ٦ \text{ جتا س} & ، \quad س > ٠ \end{cases}$

(٤) أ = -٢ ، د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢ س + ٣ & ، \quad س > ١ \\ \frac{٢}{س^{٢} - ١} & ، \quad س = ١ \\ \frac{}{س - ١} & ، \quad س < ١ \end{cases}$

(٥) أ = ٤ ، ب = -١ (٦) أ = $-\frac{١}{٤}$

أجوبة تمارين (١ - ٣)

(١) (أ) متصلة على ح

(ب) متصلة على ح - { -٥ }

(جـ) متصلة على ح - { -٢ ، -٣ }

(د) متصلة على ح - { -١ }

(هـ) مصلة على ح

(و) متصلة على ح

(٢) (أ) متصلة على ح - { ٠ }

(ب) متصلة على ح

(جـ) متصلة على ح - { ٣ }

(د) متصلة على] $-\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{ط}{٤}$ [

(هـ) مصلة على ح

(٣) (أ) متصلة على] $-\frac{ط}{٦}$ ، $\frac{ط}{٦}$ [

(٤) (أ) متصلة على] -٤ ، ٦ [- { ٤ }

(ب) متصلة على ح

(٥) أ = $-\frac{١}{٢}$ ، ب = $\frac{-٩}{٢}$

أجوبة تمارين (٢ - ١)

(١) (أ) قابلة للاشتقاق

(ب) قابلة للاشتقاق لجميع قيم س ما عدا س = -٥

(جـ) غير قابلة للاشتقاق

(د) غير قابلة للاشتقاق

(٢) غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

(٣) متصلة عند س = ٢ ، غير قابلة للاشتقاق عندها

(٤) متصلة عند س = ١ ، قابلة للاشتقاق عندها ، د (١) = ٣

(٥) أ = ١ ، ب = ١

(٦) أ = ٤ ، ب = -٤

(٧) قابلة للإشتقاق ، دَ (٠) = ٠

(٨) أ = ٣ ، ب = -١٠

أجوبة تمارين (٢ - ٢)

(١) (أ) $\frac{٢س^{٢} - ٣ص}{٣س - ٢ص^{٢}}$ (ب) $\frac{س}{٢ص}$ (جـ) $\frac{- س^{٢}}{ص^{٢}}$ (د) $\frac{س - ص}{س - ٢ص}$

(هـ) $\frac{ص^{٢} - ٤س ص - ٣س^{٢}}{٢(٣ ص^{٢} - س ص - س^{٢})}$ (و) $\frac{٢ \text{ جتا } ٢ س}{\text{قا}^{٢} ص}$ (ز) $\frac{- \text{ جا } س}{٣ \text{ جتا } ٣ ص}$

(٢) (أ) $-\frac{٢}{٣}$ (ب) غير معروف (جـ) صفر

(٣) (أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٣٤َ ٢٦°

(٤) (أ) $٦ (١٠س^{٢} - ١)^{\frac{-٥}{٢}}$ (ب) $- ١٨ س^{-٤}$ (جـ) $١٦٨ (٢س + ٣)^{-٤}$

(د) $\frac{- ٣ س}{ص^{٥}}$ (هـ) - جتا س (و) ٨ جا ٢س

(ز) - جتا س (ح) - س جتا س - ٣ جا س

(٥) (أ) ٢ (ب) - ١٤ (جـ) صفر (د) صفر (هـ) ط

(٦) ٢

أجوبة تمارين (٣ - ١)

(١) (أ) ٣س + ٢ص - ٨ = ٠ ، ٢س - ٣ص - ١٤ = ٠

(ب) س - ٢ص - ٥ = ٠ ، ٢س + ص = ٠

(جـ) ص - ٢س + ١ = ٠ ، ٢ص - س - ٣ = ٠

(د) ص = ٢ ، س = $\frac{ط}{٤}$

(هـ) ٤س - ص - $\frac{٤ط}{٤}$ + $\sqrt{٣}$ = ٠ ، س + ٤ص - $\frac{ط}{٣}$ - ٤$\sqrt{٣}$ =

(و) $\sqrt{٢}$س + ص - ٣ $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ ط = ٠ ، س - $\sqrt{٢}$ ص - $\frac{٣}{٤}$ ط = ٠

(٢) (-٣ ، ٠) ، (٠ ، -١)

(٣) (١ ، ٢) ، (-١ ، ٨)

(٤) (٤ ، ١٦)

(٥) ٢س + ص + ٨ = ٠ ، ٢س + ص - ٨ = ٠

(٦) ٢ س + ٣ ص - ٢٦ = ٠ ، ٢س + ٣ص + ٢٦ = ٠

(٧) ($\frac{ط}{٢}$ ، ١) ، ($\frac{٣ط}{٢}$ ، -١)

(٨) أ = ١ ، ب = ٥

(٩) أ = ٥ ، ب = -٧

(١١) أ = - $\frac{١}{٢}$ ، ب = - $\frac{٣}{٢}$ ، جـ = ١

ومعادلة المماس هى ٣س + ص - ١ = ٠

(١٢) ٤س - ص + ٤ = ٠

(١٣) (٠ ، ٠) ، (٦ ، ٢١٦)

(١٤) (-٢ ، ١) ، (٢ ، -١)

أجوبة تمارين (٣ - ٢)

(١) - ٢٠,٠

(٢) (-١ ، -٦)

(٣) (- ١٠ ، ١٢) ، (٦ ، - ٤)

(٤) - ٤,٥ سم / ث

(٥) ٨٠ ط سم^{٢} / ث

(٦) - $\frac{٢٥}{٢}$ سم / دقيقة ، ٣٢٥ $\sqrt{٢}$ سم

(٧) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$ متر / ث

(٨) -٨ متر / ث ، -٣ متر / ث ، - $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$ متر / ث

(٩) -٣ ط سم٢ / دقيقة

(١٠) ١ سم٢ / دقيقة

(١١) - ٥ $\sqrt{٢}$

(١٢) تتباعدان ١٠ كم / ساعة

(١٣) ٠,٠٩ متر / ث تقريبًا

(١٤) $\frac{١}{٩}$ سم / ث ، ٨ ط سم٢ / ث ، - $\frac{٨}{٩}$ سم / ث

(١٥) ٢ ، ٤ ، ٦ سم

(١٦) ٠,٠٨٥ ط سم٣ / دقيقة

أجوبة تمارين (٤ - ١)

(١) I متزايدة على] - ∞ ، -٢ [، متناقصة على] -٢ ، ∞ [

II متزايدة على] ٢ ، ∞ [، متناقصة على] - ∞ ، ٢ [

III متزايدة على] - ∞ ، ∞ [

IV متزايدة على] - ∞ ، ٠ [∪] ٢ ، ∞ [، متناقصة على] ٠ ، ٢ [

V متناقصة على] - ∞ ، ٢ [∪] ٢ ، ∞ [

VI متزايدة على] - ∞ . -١ [∪] ١ ، ∞ [متناقصة على] -١ ، ١ [

VII **متزايدة على ح**

VIII متناقصة على] - ∞ ، ٠ [، متزايدة على] . ، ١ [∪] ١ ، ∞ [

أجوبة تمارين (٤ - ٢)

(١) I القيمة الصغرى = ٢

II القيمة العظمى = $\frac{٩}{٤}$

III نقطة انقلاب (١ ، ٣)

IV القيمة العظمى = ٢٥ والصغرى = -٢ ونقطة الانقلاب ($-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢٣}{٢}$)

V القيمة العظمى = ١ والصغرى = ٠ ونقطة الانقلاب ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)

VI القيمة العظمى = $\frac{٤}{٢٧}$ والصغرى = ٠ ونقطة الانقلاب ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٢٧}$)

VII **القيمة العظمى = ٠ والصغرى = ٤**

VIII القيمة العظمى = $\frac{٢٠}{٣}$ والصغرى = -٤ ونقطة الانقلاب (١ ، $\frac{٤}{٣}$)

IX القيمة العظمى = ٧ والصغرى = - ٢٥ ونقطة الانقلاب (٣ ، -٩)

X القيمة العظمى = ٣٠ والصغرى = ٥

XI القيمة العظمى = ٤

(٢) (I) -١ ، ٢٧ (II) -٦ ، ٢٦٦ (III) -١٦٩٩ ، ٣٨٨٩

(IV) ٢ ، $\frac{٤}{٣}$ (V) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١٦}{٥}$ (XI) -١ ، ١

(VII) ٤ ، -١ (VIII) - $٢\frac{١}{٤}$ ، ٩

(٤) - ٢ ، ٤

(٥) أ = $-\frac{٢٠}{٣}$ ب = $\frac{٤}{٣}$

المسألة	نقطة قيمة عظمى محلية	نقطة قيمة صغرى محلية	نقطة الانقلاب	نقطة التقاطع مع محور السينات	نقطة التقاطع مع محور الصادات
(I)	(٠ ، ٠)	(٢ ، -٤)	(١ ، -٢)	(٠ ، ٠) ، (٣ ، ٠)	(٠ ، ٠)
(II)	(-١ ، ٤)	(١ ، ٠)	(٢ ، ٠)	(١ ، ٠) ، (-٢ ، ٠)	(٠ ، ٢)
(III)	(-٢ ، ٨)	(٢، ٠)	(٤ ، ٠)	(٢ ، ٠) ، (-٤ ، ٠)	(٠ ، ٤)
(IV)			(-١ ، -٧)		(٠ ، -٣)
(V)	(١ ، ٧)	(-١ ، -١)	(٣ ، ٠)		(٠ ، ٣)
(VI)	(-١ ، $\frac{٨}{٣}$)	(٣ ، -٨)	(١ ، - $\frac{٨}{٣}$)		(٠ ، ١)

يمكن تعيين بعض النقط الاضافية لزيادة التعرف على المنحنى إذا كنا فى حاجة إليها .

(٧) ٥٥ جهاز (٨) $\frac{٥}{٣}$ سم (٩) العددان ٨ ، ٨

(١٠) ابعاد المستطيل $\frac{١}{٤}$ ل ، $\frac{١}{٤}$ ل

(١١) ابعاد المثلث ل (٢ - $\sqrt{٢}$) ، ل (٢ - $\sqrt{٢}$) ، ٢ ل ($\sqrt{٢}$ - ١)

(١٢) طول الجزئين $\frac{١٣٦}{ط + ٤}$ ، $\frac{٣٤ط}{ط + ٤}$ سم

(١٣) سرعة القاطرة ٥٠ كم / ساعة

(١٤) أكبر حجم للاسطوانة = ١٦ ط سم٣

(١٥) أبعاد متوازى المستطيلات هى ١٥ ، ٢٠ ، ٣٠ سم

(١٦) نق = ٥ سم

(١٧) (١ ، ٣) ، (١ ، -٣) (١٨) $\frac{٦}{٤ + ط}$ متر

(١٩) $\frac{\sqrt{١٠٠ \times ٣}}{٣}$ سم ، $\frac{\sqrt{١٠٠ \times ٦}}{٣}$ سم (٢٠) $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{٢}$

أجوبة تمارين (٥ - ١)

(١) $\frac{٥}{٢}$ س^{٢} + ث

(٢) $\frac{\text{س}}{٨}$ + ث

(٣) $\frac{\text{ب}^{٢}\ \text{س}^{٣}}{٣\ \text{أ}^{٢}}$ + ث

(٤) س^{٣} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + س + ك

(٥) س^{٤} − ٢س^{٣} + ٤س^{٢} − ٥س + ك

(٦) $\frac{١}{٤}$ س^{٨} − $\frac{٣}{٢}$ س^{٤} + ٤س^{٢} + س + ك

(٧) $\frac{١}{٤}$ س^{٤} − $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٢ س + م

(٨) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + م^{٢} س + جـ

(٩) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}$ س^{٢} + أ ب س + جـ

(١٠) $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ك

(١١) ٢ $\sqrt{\text{س}}$ + $\frac{٢}{٣}$ $\sqrt{\text{س}^{٣}}$ + ك

(١٢) $\frac{١}{٢}$ س^{٣} + ٢ س − $\frac{١}{\text{س}}$ + ث

(١٣) $\frac{١}{٣}$ س^{٢} − $\frac{٤}{٣}$ $\sqrt{\text{س}^{٣}}$ − س + ك

(١٤) $\frac{-\ ٣}{\sqrt[٣]{\text{ن}}}$ + م

(١٥) $\frac{(\ ٧\ \text{س} - ٣\ )^{٩}}{٦٣}$ + ك

(١٦) $\frac{-\ (\ ٢ - \text{س}\ )^{١٠}}{١٠}$ + جـ

(١٧) $\frac{١٢}{٥}$ $\sqrt[٤]{(\frac{\text{س} + ٢}{٣})^{٥}}$ + ك

(١٨) $\frac{\text{س}^{٧}}{٧}$ + $\frac{٦\ \text{س}^{٥}}{٥}$ + ٤س^{٣} + ٨س + ك

(١٩) $\frac{(٣س + ٧)^{\frac{٣}{٣}}}{٣}$ + ك

(٢٠) $\frac{-٥}{٨(٢س - ١)^{٤}}$ + جـ

(٢١) ٣ $(س + ٩)^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

(٢٢) $\frac{(س - ٣)^{٦}}{٦}$ + ك

(٢٣) $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ + $\frac{٣}{٢}$ $س^{٢}$ + ٩س + ك

(٢٤) $\frac{-٢(٢ - ٣س)^{\frac{٣}{٣}}}{٩}$ + ث

(٢٥) $\frac{(٢س + ١١)^{\frac{٥}{٥}}}{٥}$ + ث

(٢٦) $\frac{٢}{٣}(س + ٤)^{\frac{٣}{٢}} - ٢(س + ٤)^{\frac{١}{٢}}$ + ث

أجوبة تمارين (٥ - ٢)

(١) جا س - جتا س + ث

(٢) $\frac{-١}{٢}$ جتا ٢ س + ث

(٣) $\frac{١}{٤}$ جا ٤ س + ث

(٤) - ٢ جتا $\frac{س}{٢}$ + ث

(٥) (ظا س - ٢ جاس) + ث

(٦) $\frac{١}{٣}$ ظا ٣ س + ث

(٧) $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + جتا س + ث

(٨) ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ - جتا ($\frac{ط}{٢}$ - س) + ث

(٩) -٢ جتا س - $\frac{١}{٤}$ جتا ٢ س + ث

(١٠) $\int$ جتا^{٢} $\frac{س}{٢}$ ء س = $\frac{١}{٢}$ $\int$ (١ + جتاس) ء س = $\frac{١}{٢}$ (س + جا س) + ث

(١١) $\int$ (١ + ٢ جتا س + $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢ س)) ء س

= $\int$ ($\frac{٣}{٢}$ + ٢ جتا س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س) ء س = $\frac{٣}{٢}$س + ٢ جاس + $\frac{١}{٤}$ جا ٢س + ث

(١٢) **(١ + جا ٢س) ء س = س - $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + ث**

(١٣) **$\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + ظا س + ث**

أجوبة تمارين (٥ - ٣)

(١) $ص = ٣س + \frac{٢}{س} - \frac{٢}{س^{٢}} + \frac{١}{٢}$

(٢) $ص = \frac{٤}{٣} س^{٣} + س^{٢} + س + \frac{٢٠}{٣}$

(٣) $ص = س + \frac{١}{٢}$ جتا ٢س

(٤) $س^{٢} + ص^{٢} + ٧س - ٣ص - ٨ = ٠$

(٥) ص = (س - جا س)

(٦) $س^{٢} - ص^{٢} = ٥$

(٧) ص = ظا س + جا س - ١

(٨) $ص = س^{٢} - ٦س + ١٣$

(٩) $ص = ٢ + \sqrt{٣ - ٢س}$

(١٠) ٣س - ٢ص + ٢ = ٠ ، ٤س + ٦ ص = ٤٥

(١١) قيمة عظمى = ١٧ ، قيمة صغرى = - ١٥

(١٢) $- \frac{٢٨}{٣}$

(١٣) ٢

(١٤) ٨٤

(١٥) $ح = \frac{أ}{ص} + ١٢ - ٢ أ$

(١٦) ٢٧

(١٧) المتسابقة الثانية

أجوبـــة الاختبارات

★ الاختبار الأول :

(١) أ) متصلة قابلة للاشتقاق

ب) $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ جا٢ س − جتا س + ث

(٢) أ) أ = −٩ ، ب = ١٥ ، (١ ، ٧) موقع قيمة عظمى محلية ، (٥ ، − ٢٥) موقع قيمة صغرى محلية .

ب) ص^{٢} = ٦س + س^{٢} + ٣٤

(٣) أ) أ = $\pm$١ ب) $\frac{٣٧٠}{١٣}$ متر / ث

(٤) أ) متزايدة فى] − ∞ ، −١ [∪] ١ ، ∞ [، متناقصة فى] −١ ، ١ [

ب) ص − ٤س − ٤ = .

(٥) أ) ص = ظا س + جتا س −١ ب) $\frac{د ص}{د س}$ = − ١٠

★ الاختبار الثانى :

(١) أ) أ = ١ ب) ص = $\frac{١}{٨}$ (٦س + ٥)$^{\frac{٤}{٣}}$ + ث ، ٢ جا ($\frac{س}{٢}$ + ٢) + ث

(٢) أ) ص −٢ س −١ = . ب) ص = $\frac{١}{١٢}$ س^{٤} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{٧}{١٢}$ س + $\frac{٥}{٦}$

(٣) ب) محدب لأعلى لكل س < ٣ ومحدب لأسفل لكل س > ٣

القيمة العظمى المطلقة = ١٠، القيمة الصغرى المطلقة = −٤٤

(٤) أ) ٢٠٠٠ سم^{٣} و ١٠٠ ثانية

ب) أ = −٢ ، ب = ٤ النقطة موقع قيمة عظمى محلية

(٥) أ) $\pm \frac{٣}{٢}$ ب) نق = ع = ٢٠ سم

★ الاختبار الثالث :

(١) أ) متصلة وغير قابلة للاشتقاق ب) $\frac{-١}{٤ (٢ س + ١)}$ + $\frac{٣}{٨ (٢ س + ١)^{٢}}$ + ث

(٢) أ) ص = ٢ س ب) (٣ ، −١) ، (−١ ، ٣)

(٣) أ) $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + ث

ب) تزايدية فى كل من] - ∞ ، ١ [،] ٣ ، ∞ [وتناقصية فى] ١ ، ٣ [

(١ ، ٤) موقع عظمى محلية (٣ ، ٠) موقع صغرى محلية (٢ ، ٢) موقع انقلاب

(٤) أ) $\sqrt{٢ص - ٧} = \frac{١}{٢}\sqrt{٤س - ٣} + \frac{١}{٢}$ ب) ٢٠٠٠ ثقل كيلو جرام

(٥) أ) ٢ ظا $(\frac{س}{٢} + ٥) + \frac{١}{٢}$ (جا ٢س + ١) + ث ب) ٤٨ متر مربع

★ الاختبار الرابع :

(١) أ) $\frac{(٢س + ٣)^{٦}}{١٢}$ + ث ، س - $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س + ث

ب) محدبة لأسفل فى كل من [- ∞ ، -٢ [،] ٢ ، ∞ [محدب لأعلى فى] -٢ ، ٢ [

مواقع الانقلاب (± ٢ ، -٧٠)

(٢) أ) ص - ٨س = $\sqrt{٣ - \frac{٤ط}{٣}}$ ب) ص = ٣ - $\sqrt{٢س + ٥}$

(٣) أ) ٣سم / ث ب) القيمة العظمى المطلقة = ١٦ والقيمة الصغرى المطلقة = -١٦

(٤) أ) ٤,٤ ط ب) $س^{٢} + ص^{٢} - ٣س + ص - ٤ = ٠$

(٥) أ) أ = ١ وغير قابلة للاشتقاق ب) مساحة المربع = ٢ $نق^{٢}$

★ الاختبار الخامس :

(١) أ) متصلة وغير قابلة للاشتقاق

ب) $\frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} + ٢س + ث$ ، $-\frac{١}{٤}$ جتا ٢س + ث

(٢) أ) ١٣٥° ب) ص = س - $\frac{١}{٢}$ جا ٢س

(٣) أ) -١٠ سم / ث

ب) ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١٤}{٢٧}$ ٤) موقع قيمة عظمى محلية (٣ ، -١٤) موقع قيمة صغرى محلية

(٤) أ) ص + ٤ س - ١٠ = ٠ ، ص - ٢س -١ = ٠

ب) ٢ دقيقة

(٥) أ) $ص = س^{٣} + س^{٢}$

ب) محدب لأعلى فى] - ∞ ، -١ [ومحدب لأسفل فى] -١ ، ∞ [

رقم الإيداع	٢٠٠٥/١٥٧٠٧

جميع حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم داخل جمهورية مصر العربية

المواصفات الفنيـة:

مقـاس الكتـاب:	$\frac{1}{8}$ (٥٧ × ٨٢) سم
طبـع المتـن:	١ لون
طبـع الغـلاف:	٤ لون
ورق المتـن:	٧٠ جم أبيض
ورق الغـلاف:	١٨٠ جم كوشيه
عدد الصفحات بالغلاف:	١٣٦ صفحة

مطابع الشرق الأوسط

- العلم هو الوسيلة الوحيدة التى يرتفع بها شأن الإنسان إلى مراتب الكرامة والشرف، والعلم هو الدعامة الأساسية للأمن القومى لمصر.
- نحن أمة لها مستقبل .. بعقول أبنائها وقوة سواعدهم.
- جودة الطعام ليست بقيمته المادية، ولكن بقيمته الغذائية.
- السلام، والحق، والعدل، قيمة رفيعة يجب أن نتمسك بها، ونحافظ عليها.
- التدخين عادة سيئة، تدمر الصحة وتبدد المال.
- من دعائم الديمقراطية أن تعبر عن رأيك فى حرية تامة، وتحترم أيضًا حرية الآخرين فى التعبير عن آرائهم.
- صوتك المرتفع دليل على ضعف موقفك.
- ليس بالحفظ والاستظهار تحظى بالتفوق، ولكن بالفهم والتحليل والتطبيق تزداد معارفك، وتنمو قدراتك.
- مصر تحتاج إلى المفكرين والمبدعين .. فلِمَ لا تكون واحدًا منهم؟
- نظافة البيئة وحفظها من التلوث، مسئوليتنا جميعًا، وواجهة لحضارتنا العريقة.
- النظافة من الإيمان.
- نظافة مدينتك عنوان لمصر أمام العالم.
- البصق وإلقاء المهملات فى الشوارع يقلل من شأن وطننا أمام الأجانب.

مطابع